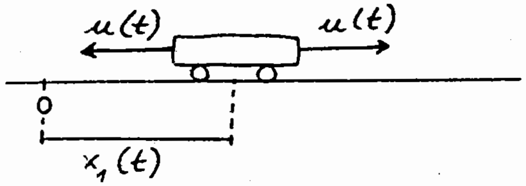
OPTIMALE STEUERPROZESSE

Kap. I : Einführung

§ 1 Beispiele

1.1. Zeitoptimale lineare Steuerprozesse

(1) Zeitoptimale Steuerung eines Wagens



Problem: Der Wagen soll möglichst schnell zum Nullpunkt gesteuert werden und dort stehenbleiben.

$x_1(t)$: Entfernung des Wagens (Masse = 1) vom Nullpunkt zur Zeit t.

$x_2(t)$: Geschwindigkeit des Wagens.

$u(t)$: Beschleunigung des Wagens, Steuerfunktion.

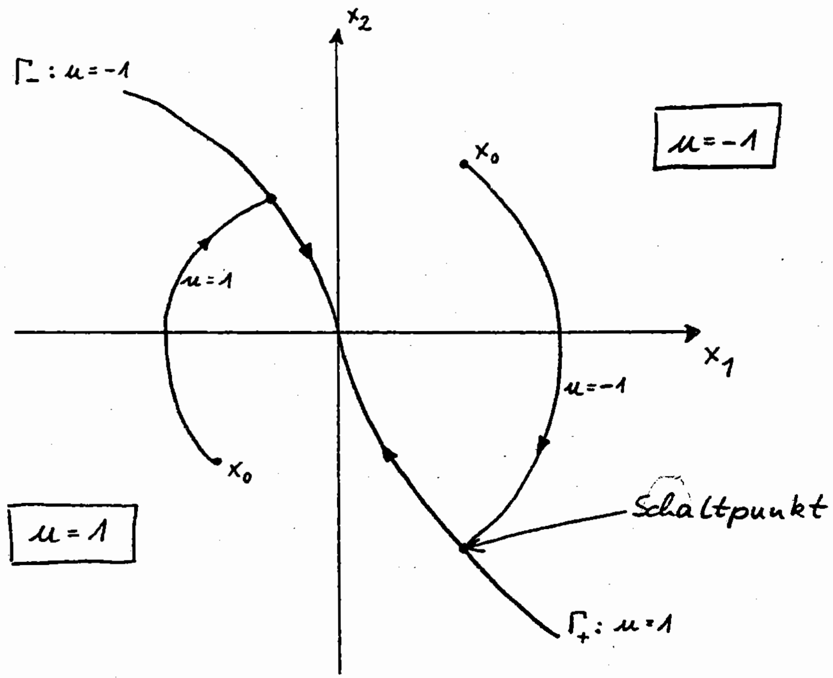
$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: Zustand des Systems

Dynamik des Systems:

$$(1.1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 , \qquad 0 \le t \le T, \\ \dot{x}_2 = u(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ -1 \le u(t) \le 1 \end{cases}$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, so daß die Endzeit T minimal wird unter (1.1).

Lösung im Phasenraum:



Γ_+ , Γ_- : Schaltkurven, auf denen die Schaltpunkte liegen

Die optimale Steuerung $u(t) \in \{-1, 1\}$ ist bang-bang und i.a. unstetig, vgl. § 5.

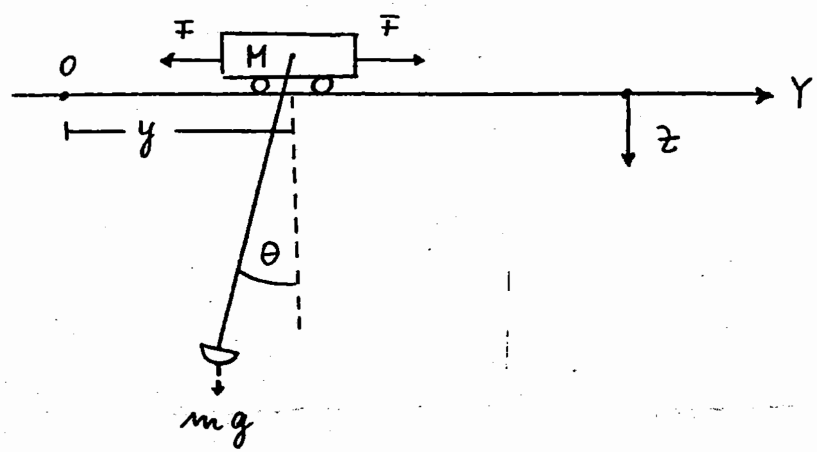
Die Dynamik (1.1) lautet in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u =: Ax + Bu$$

$$x(0) = x_0 , \quad x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(t) \in \mathcal{U} := [-1, 1]$$

(2) Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers



Es bedeuten:

τ: Zeit

y: Abstand vom Ursprung

θ: Winkel des Greifers mit der Vertikalen

F: Beschleunigungskraft

M: Masse des Wagens

m: Masse des Greifers und seines Inhaltes

σ: Seilspannung, $(=1)$

ℓ: Seillänge

Die Bewegungs-Gleichungen des Wagens in Y-Richtung lauten

$$M \frac{d^2 y}{d\tau^2} = F - \sigma \sin\theta , \qquad |F| \leq F_1 .$$

Die Bewegungs-Gleichungen des Greifers in Z-Richtung sind

$$m \frac{d^2}{d\tau^2}(y - \ell \sin\theta) = \sigma \sin\theta .$$

Problem: Bringe den Wagen von der Position 0 (zur Zeit $\tau = 0$) in die Position E in minimaler Zeit τ_1, so daß

$$\theta(0) = \dot\theta(0) = 0\,, \quad \theta(\tau_1) = \dot\theta(\tau_1) = 0\,.$$

Man kann sich auf kleine Winkel θ beschränken, d.h. $\sin\theta \doteq \theta$. Unter Verwendung der neuen Zeit- und Zustandsvariablen

$$t := \left(\frac{(m+M)g}{Ml}\right)^{1/2} \tau\,,$$

$$x_1 := -\frac{(m+M)mg\theta}{MF_1} + \frac{(m+M)^2 g y}{MF_1 L}\,,$$

$$x_3 := \frac{(m+M)g\theta}{F_1}\,,$$

$$u := \frac{F}{F_1} \quad \text{Steuerung}$$

gehen die Bewegungs-Gleichungen über in:

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} \dot x_1 &= x_2 \\ \dot x_2 &= u \\ \dot x_3 &= x_4 \\ \dot x_4 &= -x_3 + u \\ -1 &\le u \le 1\,. \end{aligned}$$

Die Dynamik und Randbedingungen für den Zustand $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ lauten in vektorieller Schreibweise

$$\dot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$=: Ax + Bu\,,$$

$$x(0) = 0\,, \quad x(T) = (E, 0, 0, 0)^T\,, \quad E > 0\,.$$

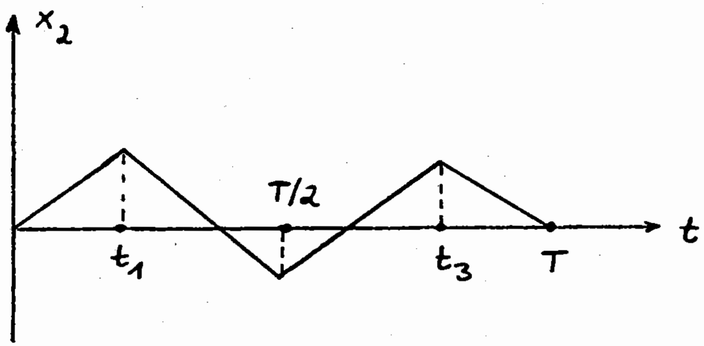
(T: Endzeit).

Die optimale Steuerung ist

$$
u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_1 \\ -1, & t_1 < t \le t_2 \\ 1, & t_2 < t \le t_3 \\ -1, & t_3 < t \le T \end{cases}
$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$t_2 = T/2, \quad t_3 = T - t_1 .$$



Für $E = 1$ erhält man numerisch

$$t_1 = 0.8023, \quad T = 4.281,$$

vgl. § 5.

1.2. Nichtlineare optimale Steuerprozesse

(3) Optimales Fischen

$x(t)$: Größe bzw. "Biomasse" einer Population (renewable resource) zur Zeit t

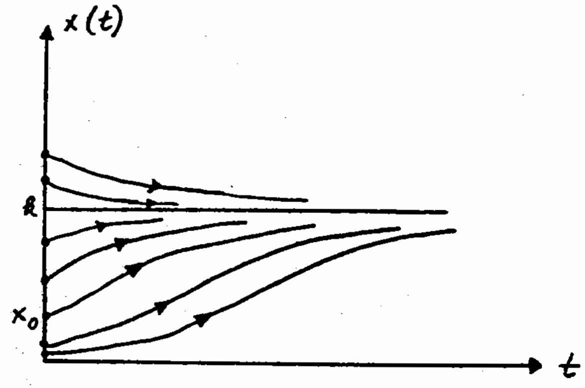
Logistisches Wachstum:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad x(0) = x_0 > 0,$$

Konstanten:

r: maximale biologische Wachstumsrate

k: natürliches Gleichgewicht



$$x(t) = \frac{k}{1 - a e^{-rt}}, \quad a = 1 - \frac{k}{x_0}$$

Fang-Dynamik:

$u(t)$: Fang-Intensität bzw. Fang-Rate

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - u(t), \quad 0 \le t \le T \quad (T: \text{Endzeit})$$
$$(1.3) \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \text{ frei}$$
$$0 \le u(t) \le u_{max}$$

$c(x)$: Fangkosten pro Einheit bei einer Population x; z.B. $c(x) = c/x$

p: Preis pro Einheit (konstant)

$\delta > 0$: Discount-Faktor

Nettogewinn im Zeitraum $[0, T]$

$$F(x,u) = \int_0^T e^{-\delta t} \left(p - c(x(t))\right) u(t) \, dt$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Fangrate $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, sodaß der Gesamtgewinn $F(x,u)$ unter (1.3) maximal wird.

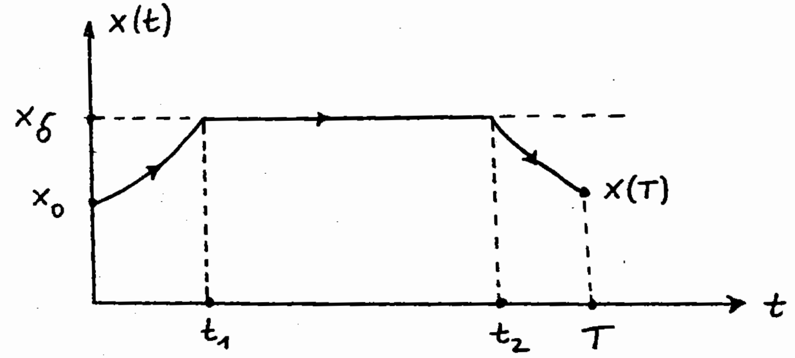
Numerische Lösung:

Der "Gleichgewichtspunkt" x_δ sei Lösung von

$$p - c(x_\delta) = \frac{1}{\delta} \left[(p-c) w \right]'(x_\delta),$$

$$w(x) = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Für $x_0 < x_\delta$ und T genügend groß gilt



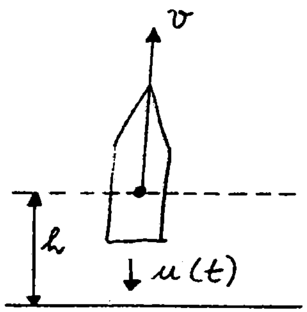
$u = 0$ | $u = w(x_\delta)$ | $u = u_{max}$

bang - singulär - bang

Bem.: Die Steuerung u tritt linear in der Dynamik und im Zielfunktional auf; $u(t)$ ist unstetig, vgl. § 2.

(4) Das GODDARD - Problem (Höhenrakete)

Bezeichnungen:



$h(t)$: Höhe

$v(t)$: Geschwindigkeit

$m(t)$: Masse

$u(t)$: Schub

$0 \le t \le T$, die Endzeit T ist fest oder frei

$D(h,v)$: Luftwiderstand

$g(h)$: Gravitationskraft

c : spezifischer Impuls pro Einheit Treibstoff.

Hierbei: $D(h,v) = \alpha v^2 \exp(-\beta, h)$,

$$g(h) = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2} \,,$$

g_0 : Gravitationskonstante

r_0 : Erdradius.

Dynamik

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \frac{1}{m}\left[u(t)\cdot c - D(h,v)\right] - g(h), \\ \dot{m} = -u(t), \\ 0 \le u(t) \le u_{max} \,. \end{cases}$$

Randbedingungen:

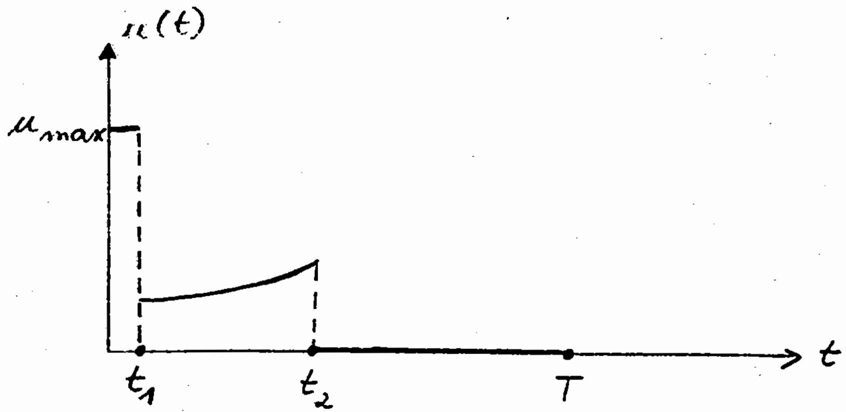
(1.5) $h(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad m(0) = 0,$

$m(T) = m_T,$

Treibstoffvorrat : $m_0 - m_T$

Problem: Gesucht ist ein stückweise stetiger Schub $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, welcher die Höhe $h(T)$ maximiert unter (1.4), (1.5).

Numerische Lösung: (ca 1950)



bang - singulär - bang

Die Lösung ergibt eine ca. 40%ige Verbesserung gegenüber der "Ingenieur-Lösung"

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & 0 \le t \le t_1, \quad m(t_1) = m_T \\ 0, & t_1 < t \le T \end{cases}$$

Dies ist die optimale Lösung ohne Luftwiderstand ($\alpha = 0$).

<u>Bem.:</u> Die Steuerung u tritt <u>linear</u> auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist <u>unstetig</u>, vgl. § 7.

(5) Optimale Lagerhaltung

Zur Beschreibung des Modells seien

$x(t)$: Lagerbestand zur Zeit t

$u(t)$: Produktionsmenge pro Zeiteinheit, (Lagerzugang: Steuerung)

$d(t)$: Nachfragemenge pro Zeiteinheit (Lagerabgang: gegebene Funktion)

Konstanten:

$\bar{x}$: Sicherheitsreserve für Spitzennachfrage

$\bar{u}$: maschinenabhängige günstigste Produktionsmenge

$c_1, c_2 > 0$: konstante Kostenbeiträge

Problem: Finde eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, welche die Kosten

$$\int_0^T [c_1(x(t)-\bar{x})^2 + c_2(u(t)-\bar{u})^2]\,dt$$

minimiert unter

$$\dot{x}(t) = u(t) - d(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) \text{ frei}.$$

Zur numerischen Lösung müssen geeignete RICCATI'sche DGL gelöst werden.

Bem.: Die Steuerung u tritt nichtlinear im Kostenfunktional auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist stetig, vgl. § 8.

(6) Ein Spline-Problem

Sei $k \geq 2$. Gesucht ist eine Funktion $s: [0,T] \to \mathbb{R}$, $T > 0$ fest, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $s^{(j)}(t)$ ist stetig für $j = 0, .., k-1$,

(2) $s^{(k)}(t)$ ist stückweise stetig,

(3) s minimiert das Integral

$$\int_0^T s^{(k)}(t)^2 \, dt$$

mit $s^{(j)}(0) = c_j$, $s^{(j)}(T) = d_j$, $j = 0, .., k-1$.

Bekanntes Ergebnis: $s(t)$ ist ein Polynom vom Grade $\leq 2k-1$.

Umwandlung in einen optimalen Steuerprozeß:

$u(t) := s^{(k)}(t)$ Steuerfunktion, stückweise stetig

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ \vdots \\ s^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Zustandsfunktion, stetig bzgl. t

$$x_0 := \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix}, \quad x_T := \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{k-1} \end{pmatrix}$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Funktion $u: [0,T] \to \mathbb{R}$, welche

$$\int_0^T u(t)^2 \, dt \qquad \text{(Zielfunktional)}$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & 0 \leq t \leq T \\ \quad \vdots & \\ \dot{x}_{k-1} = x_k, & \\ \dot{x}_k = u(t), & \end{cases}$$

$x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$.

Die Dynamik (1.6) lautet in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bem.: Die Steuerung u tritt nichtlinear im Zielfunktional auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist stetig (sogar C^∞), vgl. § 8.

§2 Formulierung optimaler Steuerprozesse

Im folgenden bezeichne:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Zustandsvektor eines Systems zur Zeit t,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Steuervektor zur Zeit t,

t_0 : Anfangszeit, o.E. $t_0 = 0$,

T : Endzeit, fest vorgegeben oder frei, $T > t_0$.

Komponenten:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}.$$

Ein optimaler Steuerprozeß ist durch folgende Daten gegeben:

(1) Dynamik des Prozesses,
(2) Randbedingungen für den Zustand,
(3) Steuerbereich,
(4) Zielfunktion (Kostenfunktional).

Dynamik eines Prozesses:

Die Steuerung u beeinflußt den Zustand x gemäß der DGL

$$(2.1) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \qquad 0 \le t \le T.$$

Hierbei sei $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. x und u stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen f_x ($n \times n$ Matrix) und f_u ($n \times m$ Matrix) seien stetig. Ein Funktionenpaar (x, u) mit

$u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ stückweise stetig,

$x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ stetig und stückweise C^1

heißt Lösung der DGL (2.1) in $[0,T]$, wenn gilt

$$(2.1\,a) \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$$

für alle Stetigkeitsstellen $t \in [0,T]$ von $u(\cdot)$.

Randbedingungen:

Seien $M_0, M_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen. Der Anfangszustand $x(0)$ und der Endzustand $x(T)$ genüge den Bedingungen

$$(2.2) \quad x(0) \in M_0 , \quad x(T) \in M_1 .$$

In den Anwendungen sind M_0, M_1 meistens gleichungsdefinierte Flächen

$$M_0 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0 \},$$
$$M_1 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0 \}$$

mit C^1-Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $0 \le s, r \le n$. Die Randbedingungen (2.2) lauten dann

$$(2.2\,a) \quad \varphi(x(0)) = 0, \quad \psi(x(T)) = 0 .$$

Der Fall $s = 0$ bzw. $r = 0$ bedeutet formal, daß keine Bedingungen für $x(0)$ bzw. $x(T)$ gegeben sind,

d.h. $x(0)$ bzw. $x(T)$ ist frei.
Als Spezialfall von (2.2 a) erhält man die Standard-Randbedingungen

$$(2.2\,b) \quad x(0) = x_0 , \quad \psi(x(T)) = 0$$

mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Steuerbereich:

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Der Steuervektor $u(t)$ genüge der Einschränkung

$$(2.3) \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Ein Funktionenpaar (x, u) heißt zulässig zur Endzeit T, falls (2.1) – (2.3) erfüllt sind.

Zielfunktional:

(2.4) $$F(x,u) := g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\,dt,$$

wobei $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $f_0: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig und bzgl. x, u stetig partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen $f_{0,x}$, $f_{0,u}$ seien stetig.

In kompakter Form erhalten wir damit den folgenden optimalen Steuerprozeß:

(2.5)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \\ & F(x,u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt \\ \text{unter} & \dot{x} = f(t,x,u), \quad 0 \le t \le T \\ & x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1, \\ & u(t) \in \mathcal{U} \end{array}}$$

Zur Präzisierung einer optimalen Lösung (globale Minimalstelle) von (2.5) treffen wir die Fallunterscheidungen:

(1) Feste Endzeit: Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T heißt optimale Lösung von (2.5), wenn

$$F(x^*, u^*) \le F(x,u)$$

für alle zulässigen Paare (x,u) zur Endzeit T.

(2) Freie Endzeit: Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T^* heißt optimale Lösung von (2.5), wenn

$$F(x^*, u^*) \le F(x,u)$$

für alle zulässigen Paare (x,u) zu beliebigen Endzeiten T. In diesem Falle ist also T eine zusätzliche Optimierungsvariable.

Die Funktion $x^*(\cdot)$ wird als *optimale Trajektorie* und $u^*(\cdot)$ wird als *optimale Steuerung* bezeichnet.

Ein *zeitoptimaler Steuerprozeß* ist ein optimaler Steuerprozeß (2.5) mit Zielfunktion

$$(2.6)\quad F(x,u) = T = \int_0^T 1\,dt\,,$$

d.h. man wähle in (2.5)

$$g \equiv 0,\quad f_0 \equiv 1,\quad T \text{ frei}.$$

Bei einem *linearen Steuerprozeß* wird die Dynamik (2.1) spezialisiert zu

$$(2.7)\quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

mit stetigen Matrix-Funktionen

$$A : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\cdot n},$$
$$B : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\cdot m}$$

Ein *zeitoptimaler linearer Steuerprozeß* ist dann ein Spezialfall von (2.5) der Form

Minimiere die Endzeit T unter

$$(2.8)\quad \begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,,\quad 0 \le t \le T,\\ &x(0) = x_0\,,\quad x(T) \in M\,,\\ &u(t) \in \mathcal{U}\,,\\ &M \subset \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen},\\ &\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \text{ konvex, kompakt} \end{aligned}$$

In den Anwendungen ist häufig

$$M = \{x_1\},\quad x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ fest gewählt},$$

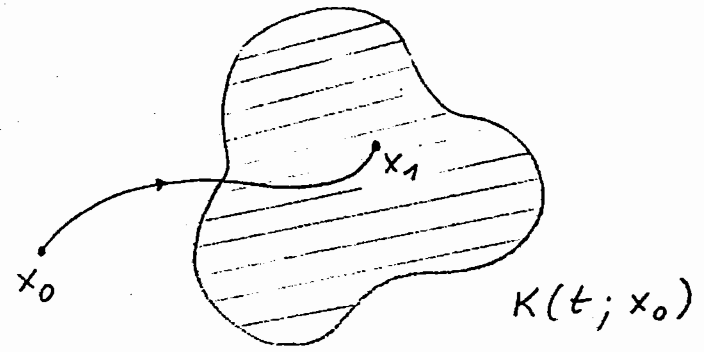
$$\mathcal{U} = \{u = (u_1,..,u_m) \mid a_i \le u_i \le b_i\,,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1,..,m\}$$

Quader.

Ein Hauptanliegen der Theorie optimaler Steuerprozesse ist die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen erster Ordnung (PONTRYAGIN'sches Minimum-Prinzip bzw. Maximum-Prinzip) für eine optimale Lösung $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ von (2.5). Hierbei spielt der Begriff der <u>erreichbaren Menge</u> bzgl. der Dynamik (2.1) eine zentrale Rolle. Für festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$K(t;x_0) := \{x_1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x,u) \text{ zulässig zu (2.1), (2.3) mit } x(0)=x_0,\ x(t)=x_1\}. \tag{2.9}$$

die <u>Menge der</u> (von x_0 aus) <u>erreichbaren Punkte</u>. x_0 heißt <u>steuerbar</u> nach x_1 in der Zeit t, falls $x_1 \in K(t;x_0)$.



Die Idee zur Herleitung des PONTRYAGIN'schen Minimum-Prinzips besteht nun darin (sei $x_0 = x^*(0)$):

(1) <u>Zeitoptimale lineare Steuerprozesse</u> (vgl. § 5): Sei T^* optimal. Die erreichbare Menge $K(t;x_0)$ ist konvex und es gilt

$$x^*(t) \in \partial K(t;x_0), \quad 0 \le t \le T^*.$$

Wende den Trennungssatz für konvexe Mengen an:

Zudem ist T^* charakterisiert durch

$$T^* = \min\{t \geq 0 \mid K(t; x_0) \cap M \neq \emptyset\}.$$

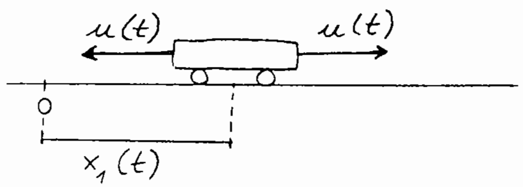
(2) <u>Allgemeine Steuerprozesse</u>:
Man approximiere die erreichbare Menge $K(T; x_0)$ im Punkte $x^*(T)$ durch den sog. konvexen <u>Erreichbarkeitskegel</u> und wende den Trennungssatz für konvexe Mengen an; vgl. § 6.

Kap. I : Einführung

§ 1 Beispiele

1.1. Zeitoptimale lineare Steuerprozesse

(1) Zeitoptimale Steuerung eines Wagens



Problem: Der Wagen soll möglichst schnell zum Nullpunkt gesteuert werden und dort stehenbleiben.

$x_1(t)$: Entfernung des Wagens (Masse = 1) vom Nullpunkt zur Zeit t.

$x_2(t)$: Geschwindigkeit des Wagens,

$u(t)$: Beschleunigung des Wagens, Steuerfunktion.

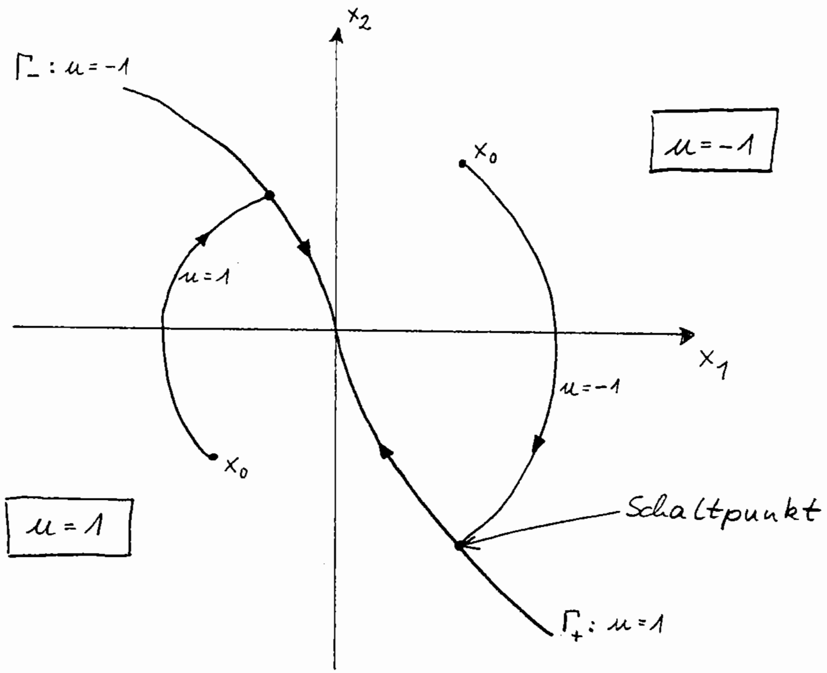
$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: Zustand des Systems

Dynamik des Systems:

$$(1.1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 , & 0 \le t \le T , \\ \dot{x}_2 = u(t) , \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2 , & x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ -1 \le u(t) \le 1 \end{cases}$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, so daß die Endzeit T minimal wird unter (1.1).

Lösung im Phasenraum:



Γ_+ , Γ_- : Schaltkurven, auf denen die Schaltpunkte liegen

Die optimale Steuerung $u(t) \in \{-1, 1\}$ ist <u>bang-bang</u> und i.a. unstetig, vgl. § 5.

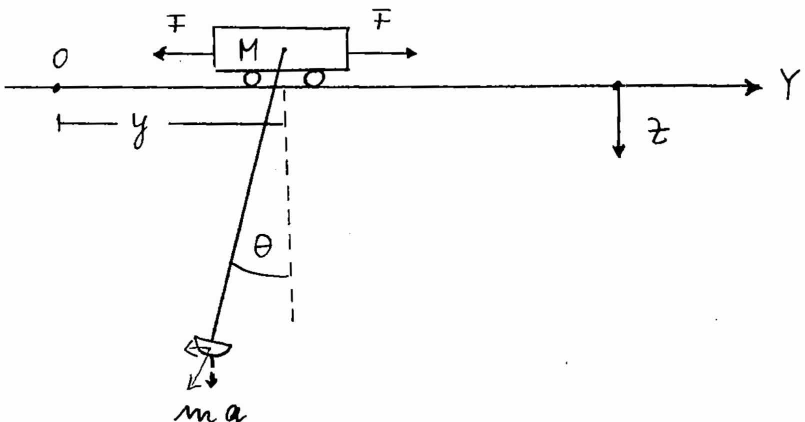
Die Dynamik (1.1) lautet in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u =: Ax + Bu$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(t) \in \mathcal{U} := [-1, 1]$$

(2) <u>Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers</u> Verladebrücke



Es bedeuten:

τ:	Zeit
y:	Abstand vom Ursprung
θ:	Winkel des Greifers mit der Vertikalen
F:	Beschleunigungskraft
M:	Masse des Wagens
m:	Masse des Greifers und seines Inhaltes
σ:	Seilspannung, $(=1)$
l:	Seillänge

Die Bewegungs-Gleichungen des Wagens in Y-Richtung lauten

$$M \frac{d^2 y}{d\tau^2} = F - \sigma \sin\theta, \qquad |F| \le F_1 .$$

Die Bewegungs-Gleichungen des Greifers in Z-Richtung sind

$$m \frac{d^2}{d\tau^2}(y - l\sin\theta) = \sigma \sin\theta .$$

$\boxed{\sigma = \frac{mg}{1-\theta}}$

$\sigma \sin\theta = \sigma - mg$

$\sigma\theta = \sigma - mg$

$\theta - $ [illegible] $= -mg$

<u>Problem:</u> Bringe den Wagen von der Position 0 (zur Zeit $\tau = 0$) in die Position E in minimaler Zeit τ_1, so daß

$$\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0, \quad \theta(\tau_1) = \dot{\theta}(\tau_1) = 0.$$

Man kann sich auf <u>kleine</u> Winkel θ beschränken, d. h. $\sin\theta \doteq \theta$. Unter Verwendung der neuen Zeit- und Zustandsvariablen

$$t := \left(\frac{(m+M)g}{M\ell}\right)^{1/2} \tau,$$

$$x_1 := -\frac{(m+M)mg\theta}{MF_1} + \frac{(m+M)^2 g y}{MF_1 L},$$

$$x_3 := \frac{(m+M)g\theta}{F_1},$$

$$u := \frac{F}{F_1} \quad \text{Steuerung}$$

gehen die Bewegungs-Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \qquad (1.2) \\ \dot{x}_4 &= -x_3 + u \\ -1 &\le u \le 1. \end{aligned}$$

x_1 = Ort der Laufkatze
x_2 = Geschw. der Laufkatze

Die Dynamik und Randbedingungen für den Zustand $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ lauten in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$=: Ax + Bu,$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = (E, 0, 0, 0)^T, \quad E > 0.$$

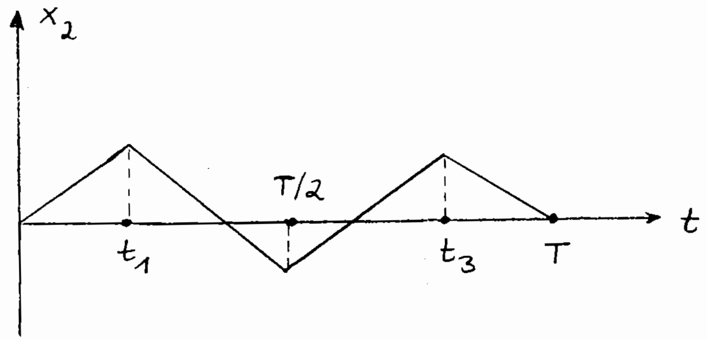
(T: Endzeit).

Die optimale Steuerung ist

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_1 \\ -1, & t_1 < t \le t_2 \\ 1, & t_2 < t \le t_3 \\ -1, & t_3 < t \le T \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$t_2 = T/2, \quad t_3 = T - t_1 .$$



Für $E = 1$ erhält man numerisch

$$t_1 = 0.8023, \quad T = 4.281,$$

vgl. § 5.

1.2. Nichtlineare optimale Steuerprozesse

(3) Optimales Fischen

$x(t)$: Größe bzw. "Biomasse" einer Population (renewable resource) zur Zeit t

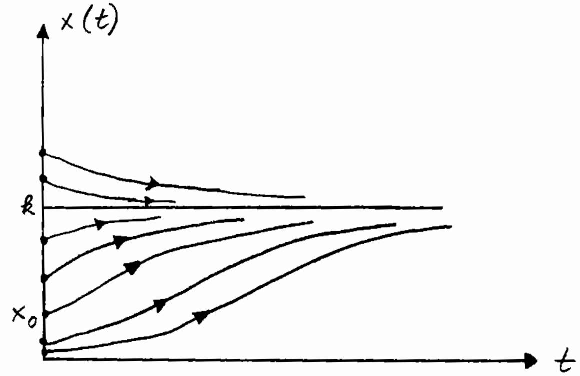
Logistisches Wachstum:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad x(0) = x_0 > 0,$$

Konstanten:

r: maximale biologische Wachstumsrate

k: natürliches Gleichgewicht



$$x(t) = \frac{k}{1 - a e^{-rt}}, \quad a = 1 - \frac{k}{x_0}$$

Fang-Dynamik:

$u(t)$: Fang-Intensität bzw. Fang-Rate

$$\dot{x} = r x \left(1-\frac{x}{k}\right) - u(t), \quad 0 \le t \le T \quad (T: \text{Endzeit})$$

(1.3) $x(0)=x_0, \quad x(T)$ frei

$$0 \le u(t) \le u_{max}$$

$c(x)$: Fangkosten pro Einheit bei einer Population x; z.B. $c(x) = c/x$

p: Preis pro Einheit (konstant)

$\delta > 0$: Discount-Faktor

Nettogewinn im Zeitraum $[0,T]$

$$F(x,u) = \int_0^T e^{-\delta t}\,(p - c(x(t)))\,u(t)\,dt$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Fangrate $u:[0,T] \to \mathbb{R}$, sodaß der Gesamtgewinn $F(x,u)$ unter (1.3) maximal wird.

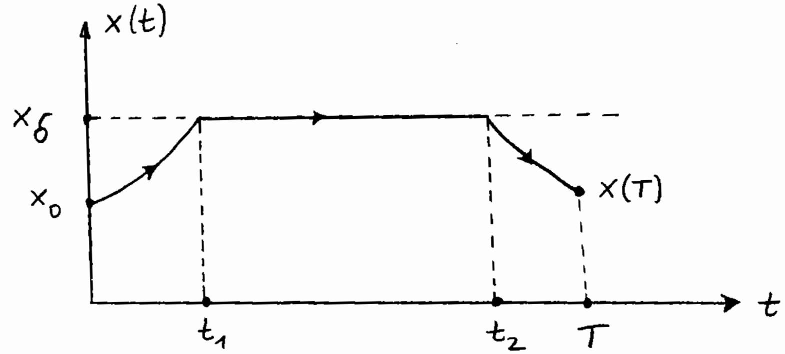
Numerische Lösung:

Der "Gleichgewichtspunkt" x_δ sei Lösung von

$$p - c(x_\delta) = \frac{1}{\delta}\left[(p-c)w\right]'(x_\delta),$$

$$w(x) = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Für $x_0 < x_\delta$ und T genügend groß gilt



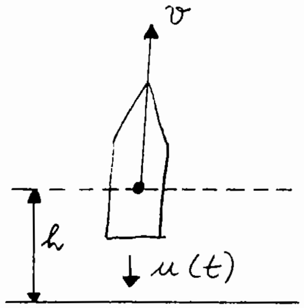
$u = 0$ | $u = w(x_\delta)$ | $u = u_{max}$

bang - singulär - bang

Bem.: Die Steuerung u tritt linear in der Dynamik und im Zielfunktional auf; $u(t)$ ist unstetig, vgl. § 7.

(4) Das GODDARD-Problem (Höhenrakete)

Bezeichnungen:



$h(t)$: Höhe

$v(t)$: Geschwindigkeit

$m(t)$: Masse

$u(t)$: Schub

$0 \le t \le T$, die Endzeit T ist fest oder frei

$D(h,v)$: Luftwiderstand

$g(h)$: Gravitationskraft

c: spezifischer Impuls pro Einheit Treibstoff.

Hierbei: $D(h,v) = \alpha v^2 \exp(-\beta, h)$,

$$g(h) = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0+h)^2},$$

g_0: Gravitationskonstante

r_0: Erdradius.

Dynamik:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \frac{1}{m}\left[u(t)\cdot c - D(h,v)\right] - g(h), \\ \dot{m} = -u(t), \\ 0 \le u(t) \le u_{max} \, . \end{cases}$$

Randbedingungen:

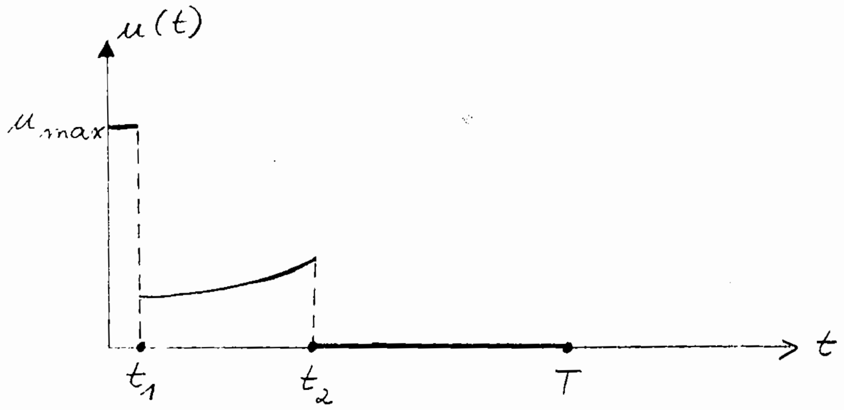
(1.5) $h(0) = 0$, $v(0) = 0$, $m(0) = 0$,

$m(T) = m_T$,

Treibstoffvorrat: $m_0 - m_T$

Problem: Gesucht ist ein stückweise stetiger Schub $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, welcher die Höhe $h(T)$ maximiert unter (1.4), (1.5).

Numerische Lösung: (ca 1950)



bang - singulär - bang

Die Lösung ergibt eine ca. 40%ige Verbesserung gegenüber der "Ingenieur-Lösung"

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & 0 \le t \le t_1, \quad m(t_1) = m_T \\ 0, & t_1 < t \le T \end{cases}$$

Dies ist die optimale Lösung ohne Luftwiderstand ($\alpha = 0$).

Bem.: Die Steuerung u tritt linear auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist unstetig, vgl. § 7.

(5) Optimale Lagerhaltung

Zur Beschreibung des Modells seien

$x(t)$: Lagerbestand zur Zeit t

$u(t)$: Produktionsmenge pro Zeiteinheit (Lagerzugang: Steuerung)

$d(t)$: Nachfragemenge pro Zeiteinheit (Lagerabgang: gegebene Funktion)

Konstanten:

$\bar{x}$: Sicherheitsreserve für Spitzennachfrage

$\bar{u}$: maschinenabhängige günstigste Produktionsmenge

$c_1, c_2 > 0$: konstante Kostenbeiträge

Problem: Finde eine stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, welche die Kosten

$$\int_0^T [c_1 (x(t) - \bar{x})^2 + c_2 (u(t) - \bar{u})^2] \, dt$$

minimiert unter

$$\dot{x}(t) = u(t) - d(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$x(0) = x_0 \ge 0, \quad x(T) \text{ frei} .$$

Zur numerischen Lösung müssen geeignete RICCATI'sche DGL gelöst werden.

Bem.: Die Steuerung u tritt nichtlinear im Kostenfunktional auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist stetig, vgl. § 8.

(6) Ein Spline-Problem

Sei $k \geq 2$. Gesucht ist eine Funktion $s:[0,T] \to \mathbb{R}$, $T>0$ fest, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $s^{(j)}(t)$ ist stetig für $j=0,..,k-1$,

(2) $s^{(k)}(t)$ ist stückweise stetig,

(3) s minimiert das Integral

$$\int_0^T s^{(k)}(t)^2\,dt$$

mit $s^{(j)}(0)=c_j$, $s^{(j)}(T)=d_j$, $j=0,..,k-1$.

bekanntes Ergebnis: $s(t)$ ist ein Polynom vom Grade $\leq 2k-1$.

Umwandlung in einen optimalen Steuerprozeß:

$u(t):=s^{(k)}(t)$ Steuerfunktion, stückweise stetig

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_k(t)\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s(t)\\ \dot{s}(t)\\ \vdots \\ s^{(k-1)}(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Zustandsfunktion, stetig bzgl. t

$$x_0 := \begin{pmatrix} c_0\\ \vdots \\ c_{k-1}\end{pmatrix}, \quad x_T := \begin{pmatrix} d_0\\ \vdots \\ d_{k-1}\end{pmatrix}$$

Problem: Bestimme eine stückweise stetige Funktion $u:[0,T]\to\mathbb{R}$, welche

$$\int_0^T u(t)^2\,dt \qquad \text{(Zielfunktional)}$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$(1.6)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & 0 \leq t \leq T\\ \quad\vdots & \\ \dot{x}_{k-1} = x_k, & \\ \dot{x}_k = u(t), & \end{cases}$$

$x(0)=x_0$, $x(T)=x_T$.

Die Dynamik (1.6) lautet in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = Ax+Bu,\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Bem.: Die Steuerung u tritt nichtlinear im Zielfunktional auf; die optimale Steuerung $u(t)$ ist stetig (sogar C^∞), vgl. § 8.

§2. Formulierung optimaler Steuerprozesse

Im folgenden bezeichne:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Zustandsvektor eines Systems zur Zeit t,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Steuervektor zur Zeit t,

t_0: Anfangszeit, o.E. $t_0 = 0$,

T: Endzeit, fest vorgegeben oder frei, $T > t_0$.

Komponenten:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}.$$

Ein optimaler Steuerprozeß ist durch folgende Daten gegeben:

(1) Dynamik des Prozesses,
(2) Randbedingungen für den Zustand,
(3) Steuerbereich,
(4) Zielfunktion (Kostenfunktional).

Dynamik eines Prozesses:

Die Steuerung u beeinflußt den Zustand x gemäß der DGL

$$(2.1) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \qquad 0 \le t \le T.$$

Hierbei sei $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. x und u stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen f_x ($n \times n$ Matrix) und f_u ($n \times m$ Matrix) seien stetig. Ein Funktionenpaar (x, u) mit

$u: [0,T] \to \mathbb{R}^m$ stückweise stetig,

$x: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ stetig und stückweise C^1

heißt Lösung der DGL (2.1) in $[0,T]$, wenn gilt

$$(2.1\,a) \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t))$$

für alle Stetigkeitsstellen $t \in [0,T]$ von $u(\cdot)$.

Randbedingungen:

Seien $M_0, M_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen. Der Anfangszustand $x(0)$ und der Endzustand $x(T)$ genüge den Bedingungen

(2.2) $x(0) \in M_0 \,, \quad x(T) \in M_1 .$

In den Anwendungen sind M_0, M_1 meistens gleichungsdefinierte Flächen

$$M_0 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0 \},$$
$$M_1 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0 \}$$

mit C^1-Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $0 \le s, r \le n$. Die Randbedingungen (2.2) lauten dann

(2.2 a) $\varphi(x(0)) = 0, \quad \psi(x(T)) = 0 .$

Der Fall $s = 0$ bzw. $r = 0$ bedeutet formal, daß keine Bedingungen für $x(0)$ bzw. $x(T)$ gegeben sind,

d.h. $x(0)$ bzw. $x(T)$ ist frei.

Als Spezialfall von (2.2 a) erhält man die Standard-Randbedingungen

(2.2 b) $x(0) = x_0 \,, \quad \psi(x(T)) = 0$

mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Steuerbereich:

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Der Steuervektor $u(t)$ genüge der Einschränkung

(2.3) $u(t) \in \mathcal{U}$ für alle $t \in [0, T]$.

Ein Funktionenpaar (x, u) heißt zulässig zur Endzeit T, falls (2.1) – (2.3) erfüllt sind.

Zielfunktional:

(2.4) $$F(x,u) := g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\,dt,$$

wobei $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $f_0: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig und bzgl. x, u stetig partiell differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen $f_{0,x}$, $f_{0,u}$ seien stetig.

In kompakter Form erhalten wir damit den folgenden optimalen Steuerprozeß:

(2.5)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \\ \quad F(x,u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt & \\ \text{unter} \quad \dot{x} = f(t,x,u), & 0 \le t \le T \\ \quad x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1, & \\ \quad u(t) \in \mathcal{U} & \end{array}}$$

Zur Präzisierung einer optimalen Lösung (globale Minimalstelle) von (2.5) treffen wir die Fallunterscheidungen:

(1) Feste Endzeit: Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T heißt optimale Lösung von (2.5), wenn

$$F(x^*, u^*) \le F(x,u)$$

für alle zulässigen Paare (x,u) zur Endzeit T.

(2) Freie Endzeit: Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) zur Endzeit T^* heißt optimale Lösung von (2.5), wenn

$$F(x^*, u^*) \le F(x,u)$$

für alle zulässigen Paare (x,u) zu beliebigen Endzeiten T. In diesem Falle ist also T eine zusätzliche Optimierungsvariable.

Die Funktion $x^*(\cdot)$ wird als optimale Trajektorie und $u^*(\cdot)$ wird als optimale Steuerung bezeichnet.

Ein zeitoptimaler Steuerprozeß ist ein optimaler Steuerprozeß (2.5) mit Zielfunktion

(2.6) $$F(x,u) = T = \int_0^T 1\,dt\,,$$

d. h. man wähle in (2.5)

$$g \equiv 0, \quad f_0 \equiv 1, \quad T \text{ frei}.$$

Bei einem linearen Steuerprozeß wird die Dynamik (2.1) spezialisiert zu

(2.7) $$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

mit stetigen Matrix-Funktionen

$$A : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\cdot n},$$
$$B : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\cdot m}.$$

Ein zeitoptimaler linearer Steuerprozeß ist dann ein Spezialfall von (2.5) der Form

(2.8)

Minimiere die Endzeit T unter

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,, \quad 0 \le t \le T,$$
$$x(0) = x_0\,, \quad x(T) \in M\,,$$
$$u(t) \in U\,,$$
$$M \subset \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen},$$
$$U \subset \mathbb{R}^m \text{ konvex, kompakt}$$

In den Anwendungen ist häufig

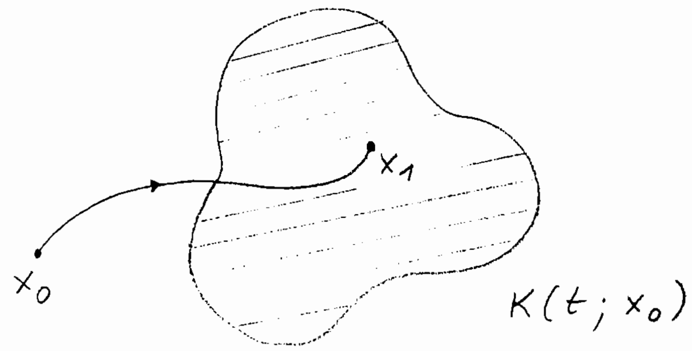
$$M = \{x_1\}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ fest gewählt},$$
$$U = \{u = (u_1,..,u_m) \mid a_i \le u_i \le b_i\,, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1,..,m\}$$

Quader.

Ein Hauptanliegen der Theorie optimaler Steuerprozesse ist die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen erster Ordnung (PONTRYAGIN'sches Minimum-Prinzip bzw. Maximum-Prinzip) für eine optimale Lösung $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ von (2.5). Hierbei spielt der Begriff der <u>erreichbaren Menge</u> bzgl. der Dynamik (2.1) eine zentrale Rolle. Für festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$K(t;x_0) := \{x_1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x,u) \text{ zulässig zu (2.1), (2.3) mit } x(0) = x_0,\ x(t) = x_1\}. \tag{2.9}$$

die <u>Menge der</u> (von x_0 aus) <u>erreichbaren Punkte</u>. x_0 heißt <u>steuerbar</u> nach x_1 in der Zeit t, falls $x_1 \in K(t;x_0)$.



Die Idee zur Herleitung des PONTRYAGIN'schen Minimum-Prinzips besteht nun darin (sei $x_0 = x^*(0)$):

(1) <u>Zeitoptimale lineare Steuerprozesse</u> (vgl. § 5): Sei T^* optimal. Die erreichbare Menge $K(t;x_0)$ ist konvex und es gilt

$$x^*(t) \in \partial K(t;x_0), \quad 0 \le t \le T^*.$$

Wende den Trennungssatz für konvexe Mengen an:

zudem ist T^* charakterisiert durch

$$T^* = \min\{t \geq 0 \mid K(t;x_0) \cap M \neq \emptyset\}.$$

(2) <u>Allgemeine Steuerprozesse</u>:
Man approximiere die erreichbare Menge $K(T;x_0)$ im Punkte $x^*(T)$ durch den sog. konvexen <u>Erreichbarkeitskegel</u> und wende den Trennungssatz für konvexe Mengen an; vgl. § 6.

Kap. II Lineare Steuerprozesse

§ 3 Rückblick auf lineare DGL

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei

$A : I \to \mathbb{R}^{n \cdot n}$ stückweise stetige Matrix-Funktion,

$c : I \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig.

Zu $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine stetige Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ der AWA

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + c(t), \\ x(t_0) &= x_0 . \end{aligned}$$

Die Ableitung $\dot{x}(t) = dx/dt$ existiert an allen Stetigkeitsstellen $t \in I$ von A und c. Die DGL

$$(3.2) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

heißt homogene DGL. Die DGL

$$(3.3) \qquad \dot{x} = -A(t)^T x \qquad (T\text{: Transponierung})$$

heißt adjungierte DGL.

Die Menge der Lösungen der homogenen DGL $\dot{x} = A(t)x$ ist ein n-dim. Vektorraum. Für je n linear unabhängige Lösungen $x_1(t), .., x_n(t)$ heißt die reguläre $n \times n$ Matrix

$$\phi(t) = (x_1(t), .., x_n(t))$$

Was ist $\phi(t,t_0)$?

eine Fundamentalmatrix. Die Fundamentalmatrix $\phi(t, t_0)$ mit $\phi(t_0, t_0) = E_n$, $t_0 \in I$, heißt Übergangsmatrix. $\phi(t,t_0) = \phi(t) \cdot \phi^{-1}(t_0)$

Eigenschaften:

(a) $\phi(t, t_1)\,\phi(t_1, t_0) = \phi(t, t_0)$

(b) $\phi(t, s)^{-1} = \phi(s, t)$

(c) $\psi(t, t_0) := (\phi(t, t_0)^{-1})^T = \phi(t_0, t)^T$

ist Übergangsmatrix zur adjungierten DGL $\dot{x} = -A(t)^T x$.

Variation der Konstanten:

Die Lösung der AWA

$$\dot{x} = A(t)x + c(t), \quad x(t_0) = x_0$$

lautet explizit

$$(3.4) \quad x(t) = \phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,s)\,c(s)\,ds \,. \quad \checkmark$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Die DGL

$$\dot{x} = Ax$$

besitzt die Übergangsmatrix

$$(3.5) \quad \phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}, \qquad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k .$$

(3.6) Lemma: Es existieren C^1-Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t) A^k .$$

Beweis: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gibt es $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$ mit

$$A^n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell A^\ell .$$

Die Funktionen φ_k lassen sich so wählen, daß

$$\phi(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t) A^k$$

die Matrix-AWA

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t), \quad \phi(0) = E$$

erfüllt. Dann gilt $\phi(t) = e^{At}$. Zur Konstruktion der φ_k setze man

$$\varphi_k(0) = \delta_{0k}, \quad k = 0,..,n-1 \;\Rightarrow\; \phi(0) = E.$$

Die DGL $\dot\phi = A\phi$ und $A^n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell A^\ell$

ergeben $\dot\phi = A\phi$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \dot\varphi_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k A^{k+1}$$

$$\overset{A^n=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell A^\ell}{=:} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi_\ell a_{k\ell}\right) A^k, \quad a_{k\ell} \in \mathbb{R}.$$

Die AWA

$$\dot\varphi_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi_\ell a_{k\ell}, \quad \varphi_k(0) = \delta_{0k}$$

hat genau eine Lösung φ_k. ■

Die Eigenwerte von A seien λ_j mit der Vielfachheit ν_j, $j = 1, \ldots, k$. Dann gibt es Polynome $p_j(t)$ vom Grade $\leq \nu_j - 1$ mit

$$(3.7) \quad e^{At} x_0 = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} p_j(t).$$

Falls A in JORDAN'scher Normalform vorliegt

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_r} \end{pmatrix},$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k_j \times k_j \text{ Matrix}, \\ j = 1, \ldots, r, \\ k_j \leq \nu_j, \end{array}$$

so gilt $e^{At} = \operatorname{diag}(e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_r t})$ mit

$$(3.8) \quad e^{J_j t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4 Steuerbarkeit bei linearen autonomen Steuerprozessen

Sei A eine $n \times n$ Matrix und B eine $n \times m$ Matrix. Wir betrachten lineare Steuerprozesse (2.7) der Form

$$(4.1) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad 0 \le t \le T.$$

Der Steuerbereich $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ sei konvex. Die Lösung von

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) =: Ax + c(t), \quad x(0) = x_0$$

lautet nach (3.4), (3.5)

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds$$

für jede stückweise stetige Steuerung $u : [0,T] \to \mathcal{U}$. Damit ist die in (2.9) definierte erreichbare Menge gegeben durch

$$(4.2) \qquad K(t; x_0) = \{ e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds \} = e^{At}x_0 + K(t;0).$$

vgl. 9.29

Folgerung: x_0 ist nach x_1 steuerbar in $[0,t]$ genau dann, wenn 0 nach $x_1 - e^{At}x_0$ steuerbar ist in $[0,t]$.

Es genügt daher, die erreichbare Menge $K(t) := K(t;0)$ zu untersuchen.

Das System (4.1) mit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ heißt vollständig steuerbar, wenn für alle $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ein $t_1 > 0$ existiert mit $x_1 \in K(t_1; x_0)$. Wir werden zeigen, daß die vollständige Steuerbarkeit von (4.1) äquivalent ist zu

$$K(t) = \mathbb{R}^n \quad \text{für (alle) } t > 0.$$

(4.3) Lemma:

(i) $K(t)$ ist konvex

(ii) Ist $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, so ist $K(t)$ ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Zu (i): Zu $x_1, x_2 \in K(t)$ gibt es Steuerungen $u_i : [0,t] \to \mathcal{U}$, $i = 1,2$, mit

$$x_i = \int_0^t e^{A(t-s)} u_i(s)\, ds, \quad i = 1,2.$$

Für $\alpha \in [0,1]$ und die Steuerung $u := \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2$ gilt dann $u(s) \in \mathcal{U}$, $0 \le s \le t$, wegen der Konvexität von $\mathcal{U}$. Damit folgt

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 = \int_0^t e^{A(t-s)} u(s)\, ds \in K(t).$$

Zu (ii): Analog zu (i). ■ V o.k.

Für $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ kann der Teilraum $K(t)$ aus den

Matrizen A und B in der DGL (4.1) berechnet werden.

(4.4) Definition: Die $n \times nm$ Matrix (KALMANN-Matrix)

$$C := [B, AB, A^2B, .., A^{n-1}B]$$

heißt Steuerbarkeitsmatrix von $\dot{x} = Ax + Bu$.

(4.5) Satz: Sei $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$. Für alle $t > 0$ gilt

$$K(t) = \text{Bild}\,[B, AB, .., A^{n-1}B]$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A^k B c_k \,\middle|\, c_k \in \mathbb{R}^m \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Sei $C = [B, AB, .., A^{n-1}B]$.

(1) $K(t) \subset \text{Bild}(C)$:

Für $x \in K(t)$ gilt mit einer geeigneten Steuerung $u : [0,t] \to \mathbb{R}^m$ nach Lemma (3.6):

$$\int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \underbrace{\int_0^t \varphi_k(t-s)u(s)\,ds}_{=:\, c_k \in \mathbb{R}^m}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B c_k \in \text{Bild}(C).$$

(2) Annahme: $K(t) \subsetneq \text{Bild}(C)$

Nach (4.3) ist $K(t)$ ein linearer Teilraum. Daher gibt es $v \in \text{Bild}(C)$, $v \neq 0$, mit $v \perp K(t)$, d. h.

$$(*) \quad v^T \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\,ds = 0$$

für alle Steuerungen $u : [0,t] \to \mathbb{R}^m$.

Definiere die C^∞-Steuerung $u : [0,t] \to \mathbb{R}^m$ durch

$$u(s) := \left(v^T e^{A(t-s)} B\right)^T, \quad 0 \le s \le t.$$

Mit $(*)$ ergibt sich

$$\int_0^t u(s)^T u(s)\,ds = 0$$

$\Rightarrow \; u(s) = 0, \quad 0 \le s \le t,$ da u stetig.

Durch Differentation erhält man

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\left(u(s)^T\right)\right|_{s=t} = v^T(-1)^k A^k B = 0,$$

$$k = 0, \ldots, n-1$$

und daher gilt $v \perp \text{Bild}(C)$. Wegen $v \in \text{Bild}(C)$ muß $v = 0$ gelten: Widerspruch. ■

Insbesondere gilt also

$$K(t) = \mathbb{R}^n \text{ für } \operatorname{rang}(C) = n, \; \mathcal{U} = \mathbb{R}^m.$$

Für $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^m$ erhält man eine Abschwächung dieses Ergebnisses.

(4.6) Satz: Sei $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$.

Für alle $t > 0$ sind äquivalent:

(i) $0 \in \operatorname{int} K(t)$

(ii) $\operatorname{rang}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$

* für alle Steuerungen $u:[0,t] \to \mathcal{U}$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$:

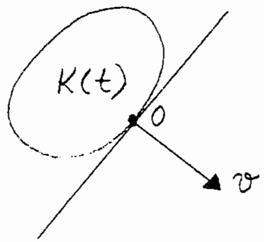
Im Beweis von Satz (4.5) ergab $K(t) \subset \text{Bild}\,[C]$. Wäre $\text{rang}\,[C] < n$, so würde daraus folgen $0 \notin \text{int}\, K(t)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$:

Annahme: $0 \notin \text{int}\, K(t)$.

$K(t)$ ist konvex nach (4.3). Ferner gilt $0 \in K(t)$. Wegen $0 \notin \text{int}\, K(t)$ gibt es nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$v^T x \le 0 \quad \text{für alle } x \in K(t).$$



Damit folgt

$$(*) \quad v^T \int_0^t e^{A(t-s)} B\, u(s)\, ds \le 0$$

Für $\alpha > 0$ genügend klein ist wegen $0 \in \text{int}\, \mathcal{U}$

$$u(s)^T := \pm \alpha\, v^T e^{A(t-s)} B \in \mathcal{U}, \quad 0 \le s \le t.$$

Die Ungleichung $(*)$ liefert dann

$$v^T e^{A(t-s)} B = 0, \qquad 0 \le s \le t.$$

Wie im Beweis von Satz (4.5) folgt daraus $v^T [B, AB, .., A^{n-1}B] = 0$ im Widerspruch zur Vor. $\text{rang}\,[C] = n$. ∎

(4.7) Beispiele:

① vgl. Beispiel ① in §1.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang}\,[B, AB] = 2.$$

$\Rightarrow$ (a) $K(t) = \mathbb{R}^2$ für $t > 0$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

(b) $0 \in \text{int}\, K(t)$, $t > 0$, $\mathcal{U} = [-1, 1]$.

② DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = u(t).$$

Diese DGL ist äquivalent zu dem System von DGL 1. Ordnung

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rang}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n \quad (\text{Übung})$$

$\Rightarrow K(t) = \mathbb{R}^n$ für $t > 0$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

Spezialfall: Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + k^2 y = u(t) \qquad b \geq 0.$$

$b = 0$: keine Dämpfung

③ Vgl. ② in §1: Erzentlader.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

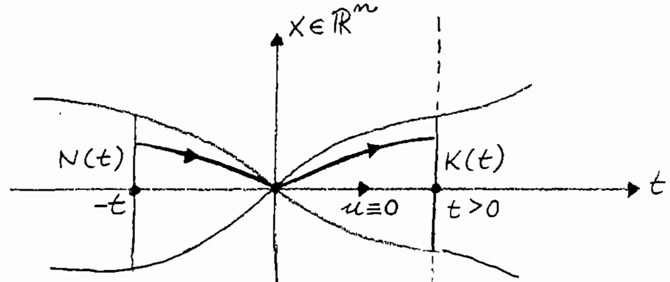
$$\operatorname{rang}[B, AB, A^2B, A^3B] = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$\Rightarrow$ (a) $K(t) = \mathbb{R}^4$ für $t > 0$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

(b) $0 \in \operatorname{int} K(t)$, $t > 0$, $\mathcal{U} = [-1, 1]$.

Neben der erreichbaren Menge $K(t)$ betrachten wir nun die Null-steuerbare Menge

$$N(t) := \{ x_1 \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \text{ ist nach } 0 \text{ steuerbar in } [0,t] \text{ bzgl. } \dot{x} = Ax + Bu \}.$$



Der Zusammenhang zwischen $N(t)$ und $K(t)$ wird hergestellt über die DGL

(4.8) $\dot{x} = -Ax - Bu$.

Sei

$$K_-(t) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \mid 0 \text{ nach } x_1 \text{ steuerbar in } [0,t] \text{ bzgl. } \dot{x} = -Ax - Bu\}$$

die erreichbare Menge bzgl. (4.8). Sei $x_1 \in K_-(t)$ mit zugehöriger Steuerung $\tilde{u} : [0,t] \to \mathcal{U}$ und Trajektorie $\tilde{x}(\cdot)$. Setze

$$x(s) := \tilde{x}(t-s), \quad u(s) := \tilde{u}(t-s), \quad 0 \le s \le t.$$

Dann genügen (x,u) der DGL $\dot{x} = Ax + Bu$ und es gilt

$$x(0) = \tilde{x}(t) = x_1, \quad x(t) = \tilde{x}(0) = 0,$$

d.h. $x_1 \in N(t)$. Damit folgt

$$\boxed{N(t) = K_-(t)}.$$

Die KALMANN-Matrix bzgl. (4.8) ist nach Def. (4.4)

$$C_- := [-B, AB, \dots, (-1)^n A^{n-1} B].$$

Offensichtlich gilt

$$\text{Bild}(C_-) = \text{Bild}(C)$$

und daher erhalten wir mit Satz (4.5):

(4.9) $N(t) = K_-(t) = K(t)$ für $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$.

Für $\underline{\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^m}$ untersuchen wir nun die Mengen

$$K := \bigcup_{t>0} K(t), \quad N := \bigcup_{t>0} N(t).$$

(4.10) <u>Satz:</u> $\mathcal{U}$ sei kompakt und es gelte $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$. Dann ist $N = \mathbb{R}^n$ (bzw. $K = \mathbb{R}^n$) äquivalent zu

(a) $\operatorname{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$,

(b) für die Eigenwerte λ_j von A gilt $\operatorname{Re} \lambda_j \le 0$ (bzw. $\operatorname{Re} \lambda_j \ge 0$), $j = 1, \dots, k$.

Beweis:

(1) Als <u>Motivation</u> beweisen wir zunächst den <u>Spezialfall</u>: Es gilt $N = \mathbb{R}^n$, falls

(a) $\operatorname{rang}(C) = n$,

(b) $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, k$.

Die Bedingung (a) und Satz (4.6) liefern eine Umgebung U von 0 mit $U \subset N$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Setzt man $u(t) \equiv 0$, so gilt

$$x(t) = e^{At} x_0 = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} p_j(t),$$

also

$$x(t_1) =: x_1 \in U \quad \text{für } t_1 \text{ genügend groß},$$

da $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Dann ist x_1 nach 0 steuerbar in $[t_1, t_2]$ mit $t_2 > t_1$, da $U \subset N$.

Daher ist x_0 nach 0 steuerbar in $[0, t_2]$.

(2) Wir zeigen die allgemeine Beh. für den Fall $K = \mathbb{R}^n$:

In der Beziehung

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds$$

sei o.E. angenommen, daß A in JORDAN'scher Normalform vorliegt. Nach (3.8) ist

$$e^{At} = \operatorname{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_k t}),$$

$$e^{J_j t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $B = (b_{ij})$ folgt

$$x_1(t) = \int_0^t e^{\lambda_1 (t-s)} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j(s) \, ds. \tag{4.11}$$

Ähnliche Formeln gelten für $x_k(t)$, $k \geq 2$.

1. Beh.: $K = \mathbb{R}^n \Rightarrow (a), (b)$:

(a) ergibt sich direkt aus Satz (4.6).

Annahme: $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$.

Aus (4.11) folgt dann die Existenz von $c > 0$ mit

$$|x_1(t)| \leq c < \infty \qquad \forall t > 0,$$

da U beschränkt ist. Dies steht im Widerspruch zu $K = \mathbb{R}^n$ und damit ist (b) gezeigt.

2. Beh.: $(a), (b) \Rightarrow K = \mathbb{R}^n$:

Wegen Vor. (a) gilt $b_{ij} \neq 0$ für ein Indexpaar (i,j) mit $1 \leq i \leq k_1$, $1 \leq j \leq m$. Setze

$$u(s) \equiv (0, .., 0, u_j, 0, .., 0),$$

$u_j \neq 0$, konstant mit $u_j \in \mathrm{int}\, U$.

(4.11) reduziert sich auf

$$x_1(t) = \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \sum_{i=1}^{k_1} \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} b_{ij} u_j \, ds .$$

wegen $Re(\lambda_1) \geq 0$ folgt damit

$$|x_1(t)| \to \infty \quad \text{für } t \to \infty ;$$

entsprechende Aussagen gelten für $x_k(t)$, $k \geq 2$. Zu $c > 0$ gibt es dann (o.E. sei U konvex) $t_0 > 0$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq c\} \subset K(t_0) .$$

Hiermit gewinnt man die Beh. $K = \mathbb{R}^n$, da c beliebig ist.

Die Aussage $N = \mathbb{R}^n$ für $t > 0$ ergibt sich sofort aus den Beziehungen

$$N(t) = K_-(t) , \quad t \geq 0 ,$$

$$\lambda_j(-A) = -\lambda_j(A) . \quad \blacksquare$$

Der letzte Satz ist das wesentliche Hilfsmittel zum Nachweis der Existenz zeitoptimaler Steuerungen; vgl. § 5.

(4.12) <u>Beispiele:</u>

① vgl. (4.7) ①

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \operatorname{rang}(C) = 2 ,$$

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 ,$$

$$\Rightarrow N = K = \mathbb{R}^2 .$$

② vgl. (4.7) ② (harmonischer Oszillator)

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + k^2 y = u , \quad b \geq 0$$

$$|u| \leq c , \quad c > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang}(C) = 2,$$

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 + 2b\lambda + k^2$$

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2},$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) \leq 0, \quad \text{da } b \geq 0,$$

$\Rightarrow N = \mathbb{R}^2$ und

$K = \mathbb{R}^2$, falls $b = 0$

(ungedämpfter Oscillator).

③ vgl. (4.7) ③

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda^2 + 1)\lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = +i, \quad \lambda_4 = -i,$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$$

$$\Rightarrow N = K = \mathbb{R}^4.$$

§5 Zeitoptimale lineare Steuerprozesse

Wir betrachten den zeitoptimalen linearen Steuerprozeß (2.8)

(5.1)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimiere die Endzeit } T \\ \text{unter} \\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ x(0) = x_0, \quad x(T) \in M, \\ u(t) \in \mathcal{U}, \quad 0 \le t \le T \end{array}}$$

Hierbei seien

$A : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n \cdot n}$, $B : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n \cdot m}$ stetig,

$M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen,

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ kompaktes, konvexes Polyeder.

Sei $\phi(t) = \phi(t,0)$ die Übergangsmatrix von $\dot{x} = A(t)x$. Die von x_0 aus erreichbare Menge (2.9) ist wegen (3.4)

(5.2)
$$K(t) = \Big\{ \phi(t)\Big(x_0 + \int_0^t \underbrace{\phi(s)^{-1} B(s) u(s)}_{\text{beschränkt}}\, ds\Big) \;\Big|\; u : [0,t] \to \mathcal{U} \text{ stückweise stetig} \Big\}.$$

Im folgenden setzen wir die Existenz einer optimalen Lösung $T^*, (x^*, u^*)$ von (5.1) voraus. Zur Charakterisierung von T^* zeigt man

(1) $K(t)$ ist konvex und stetig bzgl. t in der HAUSDORFF-Metrik,

2) $T^* = \min\{t \geq 0 \mid K(t) \cap M \neq \emptyset\}$ nach Def. von T^*,

3) $x^*(T^*) \in \partial K(T^*)$.

HAUSDORFF-Metrik: Abstand zweier Mengen

Sei

$$\mathbb{T} = \{P \subset \mathbb{R}^n \mid P \text{ abgeschlossen}\}$$

$$d(x,P) = \inf\{\|x-y\|_2 \mid y \in P\}$$

$$V(P,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,P) < \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0.$$

Der HAUSDORFF Abstand zweier Mengen $P, Q \in \mathbb{T}$ ist dann

$$D(P,Q) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid P \subset V(Q,\varepsilon) \text{ und } Q \subset V(P,\varepsilon)\},$$

$D(\cdot,\cdot)$ ist Metrik für $\mathbb{T}$.

(5.3) Satz:

(i) $K(t)$ ist konvex und beschränkt für alle $t \geq 0$.

(ii) $K(\cdot)$ ist stetig auf $[0,\infty)$ bzgl. der HAUSDORFF-Metrik.

Beweis: Zu (i): Folgt sofort aus (5.2) und der Konvexität und Kompaktheit von U.

Zu (ii): Übung: "ε-δ-Beweis" unter Verwendung der Kompaktheit von U und der Stetigkeit des Integrals in (5.2) bzgl. t. ■

(5.4) Hilfssatz: Sei $t_0 > 0$ und $x \in \operatorname{int} K(t_0)$. Dann gibt es eine Umgebung V von x und

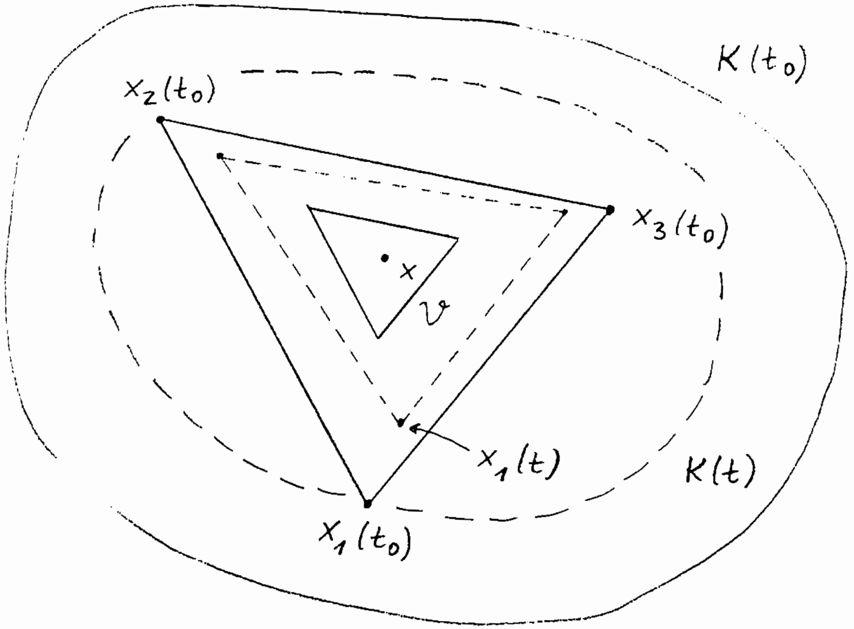
$\delta > 0$ mit

$$\mathcal{V} \subset \operatorname{int} K(t) \text{ für } |t-t_0|<\delta.$$

Beweis: Wegen $x \in \operatorname{int} K(t_0)$ enthält $K(t_0)$ ein nichtentartetes Simplex

$$S(t_0) := [x_1(t_0), .., x_{n+1}(t_0)]$$

mit Zentrum x.



Figur 5.1

Sei $\mathcal{V}$ das offene Simplex mit der halben Seitenlänge von $S(t_0)$. Das Simplex

$$S(t) := [x_1(t), .., x_{n+1}(t)]$$

enthält $\mathcal{V}$ für

$|t-t_0| < \delta$ genügend klein.

Mit der Konvexität von $K(t)$ ergibt sich dann

$$\mathcal{V} \subset S(t) \subset K(t) \text{ für } |t-t_0|<\delta. \blacksquare$$

(5.5) Satz: Geometrische Form des Minimum-Prinzips

Sei T^* und $(x^*, u^*) : [0, T^*] \to \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ eine optimale Lösung von (5.1). Dann gilt

$$x^*(t) \in \partial K(t) \text{ für } 0 \le t \le T^*.$$

Beweis:

(1) $x^*(T^*) \in \partial K(T^*)$:

Wäre $x^*(T^*) \in \operatorname{int} K(T^*)$, so gäbe es nach (5.4) eine Umgebung $\mathcal{V}$ von $x^*(T^*)$ und $\delta > 0$ mit

$$x^*(T^*) \in \operatorname{int} K(t), \quad |t - T^*| < \delta$$

$$\Rightarrow x^*(T^*) \in M \cap K(t) \neq \emptyset, \quad |t - T^*| < \delta.$$

Dies ist ein Widerspruch zu

$$T^* = \min\{t \geq 0 \mid K(t) \cap M \neq \emptyset\}.$$

(2) $x^*(t) \in \partial K(t), \quad 0 \leq t \leq T^*$:

Annahme: $x^*(s) \in \operatorname{int} K(s)$ für ein $0 < s < T^*$.

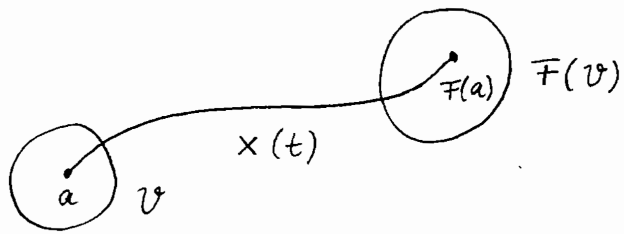
Es gibt eine Umgebung $\mathcal{V}$ von $x^*(s)$ in $K(s)$. Sei $x(t; s, a)$ Lösung der AWA

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t),$$
$$x(s) = a \in \mathcal{V}.$$

Aus der Theorie gew. DGL folgt, daß die Abbildung

$$F: a \to x(T^*; s, a)$$

bei festem T^*, s ein Homöomorphismus ist; vgl. Knobloch/Kappel, Kap. III.

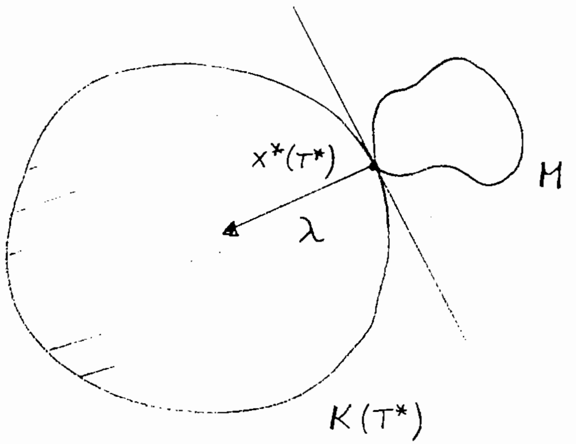


Also ist $F(\mathcal{V}) \subset K(T^*)$ offen, d.h.

$$x^*(T^*) \in \operatorname{int} K(T^*)$$

im Widerspruch zu $x^*(T^*) \in \partial K(T^*)$. ∎

Die geometrische Form des Minimumprinzips kann mit dem Trennungssatz für konvexe Mengen in eine analytische Form übersetzt werden.



Wegen

$$K(T^*) \text{ konvex}, \quad x^*(T^*) \in \partial K(T^*)$$

gibt es eine Stützhyperebene an $K(T^*)$ in $x^*(T^*)$, d.h. es gibt einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

mit

$$(5.6) \quad \lambda x^*(T^*) \leq \lambda x \quad \forall\, x \in K(T^*).$$

Alle Punkte $x \in K(T^*)$ haben die Darstellung

$$x = x(T^*)$$
$$= \phi(T^*)x_0 + \int_0^{T^*} \phi(T^*)\phi(t)^{-1}B(t)u(t)\,dt,$$

$$u: [0, T^*] \to \mathcal{U} \text{ stückweise stetig.}$$

Die Ungleichung (5.6) besagt dann

$$(5.7) \quad \begin{aligned} &\int_0^{T^*} \lambda\phi(T^*)\phi(t)^{-1}B(t)\,u^*(t)\,dt \\ &\leq \int_0^{T^*} \lambda\phi(T^*)\phi(t)^{-1}B(t)\,u(t)\,dt. \end{aligned}$$

Man definiert nun die adjungierte Variable (Zeilenvektor)

$$(5.8)\quad \lambda(t) := \lambda\, \phi(T^*)\, \phi(t)^{-1} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le t \le T^*.$$

Dann ist $\lambda(t)$ eine C^1-Funktion und genügt nach §3 der adjungierten DGL

$$(5.9)\quad \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) A(t), \quad \lambda(T^*) = \lambda.$$

Man beachte, daß

$$\lambda(t) \neq 0 \quad \forall\ 0 \le t \le T^*$$

wegen $\lambda(T^*) = \lambda \neq 0$. Die integrale Beziehung (5.7) geht damit über in

$$(5.10)\quad \int_0^{T^*} \lambda(t) B(t) u^*(t)\, dt \le \int_0^{T^*} \lambda(t) B(t) u(t)\, dt.$$

Sei nun $t \in (0, T^*)$ ein Stetigkeitspunkt von $u^*(t)$. Für $\varepsilon > 0$ genügend klein und $u \in \mathcal{U}$ setzen wir die Steuerung

$$u_\varepsilon(s) := \begin{cases} u, & s \in [t-\varepsilon, t] \\ u^*(s), & \text{sonst} \end{cases}$$

in (5.10) ein und erhalten

$$\int_{t-\varepsilon}^{t} \lambda(s) B(s) (u - u^*(s)\, ds \ge 0.$$

Daraus folgt

$$0 \le \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} \lambda(s) B(s) (u - u^*(s)\, ds$$

$$= \lambda(t) B(t) (u - u^*(t)).$$

* (b) für alle $0 < t \le T^*$ gilt

$$\lambda(t)\, x^*(t) \le \lambda(t)\, x \qquad \forall\, x \in K(t),$$

Diese Beziehung gilt für <u>alle</u> $t \in [0, T^*]$, wenn man für $u^*(t)$ rechts- und linksseitige Werte einsetzt. Damit haben wir das folgende <u>Minimumprinzip</u> gezeigt:

$$(5.11)\quad \boxed{\lambda(t) B(t) u^*(t) = \min_{u \in \mathcal{U}} \lambda(t) B(t) u, \quad \forall\, t \in [0, T^*]}$$

Ferner kann man die beiden folgenden geometrisch plausiblen Aussagen zeigen:

(a) $\lambda \dot{x}^*(T^*) \le 0$, $\lambda = \lambda(T^*)$, ✓

d.h. $K(t)$ "expandiert in $t = T^*$",

* Sei T^* und $(x^*, u^*) : [0, T^*] \to \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ eine optimale Lösung

d.h. $\lambda(t)$ ist innere Normale an $K(t)$ in $x^*(t)$.

Die vorigen Ergebnisse können mittels der <u>Hamilton-Funktion</u> H umformuliert werden:

$$(5.12)\quad \begin{aligned} H(t, x, \lambda, u) &:= \lambda_0 + \lambda \dot{x} \\ &= \lambda_0 + \lambda(A(t)x + B(t)u), \\ \lambda_0 &:= -\lambda(T^*)\, \dot{x}^*(T^*) \ge 0 \quad \text{nach (a)}, \\ \lambda &\in \mathbb{R}^n \text{ Zeilenvektor} \end{aligned}$$

(5.13) <u>Satz:</u> <u>Analytische Form des Minimumprinzips</u>

*

von (5.1). Dann gibt es $\lambda_0 \geq 0$ und eine C^1-Funktion $\lambda : [0, T^*] \to \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(t) \neq 0$, sodaß für $t \in [0, T^*]$ gilt:

(i) $\dot{\lambda} = -H_x(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$

$= -\lambda A(t)$, ✓

(ii) $H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$

$= \min\limits_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*(t), \lambda(t), u)$, $\Leftrightarrow \lambda B(u - u^*) \geq 0$

(iii) $H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t))\Big|_{t = T^*} = 0$, $\Leftrightarrow -\lambda(T^*)\dot{x}^* + \lambda(T^*)\dot{x}^* = 0$

(iv) $H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) \equiv 0$ in $[0, T^*]$ für einen autonomen Prozeß $\dot{x} = Ax + Bu$.

Beweis: Die Aussagen (i)-(iii) folgen direkt aus der Def. der Hamilton-

Die Aussage (iv) wird in LEE / MARKUS, p. 131, bewiesen. ∎

Falls $\lambda_0 > 0$ gilt, so kann man $\lambda_0 = 1$ wählen: bei dem Übergang $\lambda \to \lambda / \lambda_0$ bleiben nämlich die Aussagen des vorigen Satzes unverändert. Die Hamilton-Funktion ist dann

$$(5.14) \quad \boxed{H(t, x, \lambda, u) = 1 + \lambda(A(t)x + B(t)u)}$$

Wir betrachten ab jetzt den Steuerbereich

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_c = \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u_i| \leq 1, i = 1, .., m\},$$

Quader.

Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Die Minimum-Bedingung (5.11) lautet mit $B(t) = (b_1(t), .., b_m(t))$:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda(t) b_i(t) u_i^*(t) = \min_{u \in \mathcal{U}_c} \sum_{i=1}^{m} \lambda(t) b_i(t) u_i,$$

also

(5.15) $$\boxed{u_i^*(t) = -\operatorname{sgn}(\lambda(t) b_i(t))}$$

$$t \in [0, T^*], \quad i = 1, .., m.$$

Die Funktionen

$$\sigma_i(t) = \lambda(t) b_i(t), \quad i = 1, .., m$$

heißen Schaltfunktionen; die Nullstellen von $\sigma_i(t)$ heißen Schaltpunkte von $u_i^*(t)$.

(5.16) Definition:

(i) Eine Steuerung $u : [0,T] \to \mathcal{U}_c$ heißt bang-bang, falls $|u_i(t)| = 1$ für $t \in [0,T]$, $i = 1, .., m$.

(ii) Das System $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ heißt normal, wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, die Funktion $v^T \phi(t)^{-1} b_i(t)$ auf keinem Intervall $I \subset [0, \infty)$ verschwindet, $i = 1, .., m$.

Für ein normales System ist die optimale Steuerung $u^*(t)$ bang-bang, denn nach (5.8), (5.15) gilt

$$u_i^*(t) = -\operatorname{sgn}\left(v^T \phi(t)^{-1} b_i(t)\right),$$
$$v^T := \lambda\, \phi(T^*).$$

(5.17) Satz: Ein autonomes System

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad B = (b_1, .., b_m)$$

ist genau dann normal, wenn

$$\operatorname{rang}\left[b_i, Ab_i, .., A^{n-1} b_i\right] = n,$$

für $i = 1, .., m$.

Beweis: Man benutze analoge Techniken wie beim Beweis der Steuerbarkeitsaussagen in den Sätzen (4.5), (4.6). ■

Bemerkung: Für $m = 1$ ist die Normalität äquivalent mit der vollständigen Steuerbarkeit; vgl. Def. (4.4).

(5.18) Beispiel: vgl. §1, Beispiel (1), und (4.7) (1).

Problem: Minimiere die Endzeit T

unter
$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad 0 \le t \le T$$
$$\dot{x}_2 = u(t),$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$-1 \le u(t) \le 1.$$

Numerische Lösung: Die Hamilton-Funktion ist

$$H(x, \lambda, u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u.$$

Die adjungierten DGL

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{x_1} = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -H_{x_2} = -\lambda_1$$

haben die Lösung

$$\lambda_1(t) \equiv -c, \quad \lambda_2(t) = ct + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Die Schaltfunktion

$$\sigma(t) = \lambda_2(t) = ct + d$$

hat höchstens eine Nullstelle. Daher ist die optimale Steuerung $u(t)$ bang-bang in $[0,T]$ und hat höchstens einen Schaltpunkt. Die bang-bang-Eigenschaft folgt auch aus der Normalität des Systems. Nach (5 15) gilt

$$u(t) = -\operatorname{sgn} \sigma(t) = -\operatorname{sgn} \lambda_2(t).$$

<u>Numerische Lösung im Phasenraum: Rückwärtsintegration vom Endpunkt (0,0)</u>

Die optimale Lösung (Trajektorie) $x(t)$ muß den Endpunkt $x(T^*) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit der Steuerung

$u(t) = 1$ oder $u(t) = -1$ erreichen.

(1) <u>$u(t) \equiv 1$:</u> $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 1$, $x(T^*) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Hieraus folgt $x_2(t) \le 0$ und

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2 \implies x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 .$$

Setze $\Gamma_+ := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \frac{1}{2} x_2^2,\ x_2 \le 0\}$.

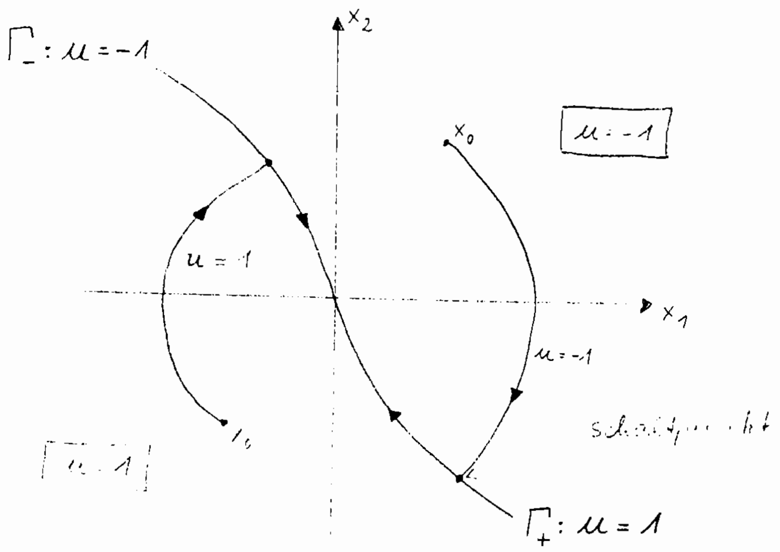
(2) <u>$u(t) \equiv -1$:</u> $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -1$, $x(T^*) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Hieraus folgt $x_2(t) \ge 0$ und

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2 \implies x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 .$$

Setze

$$\Gamma_- := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2,\ x_2 \ge 0\}.$$



Figur 5.2

Alle Schaltpunkte liegen auf der **Schaltkurve** $S = \Gamma_- \cup \Gamma_+$.

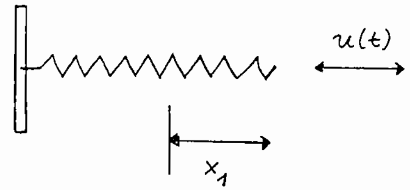
Synthese-Steuerung: (**feedback-Steuerung**)

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} -1, & \text{falls } (x_1,x_2) \text{ oberhalb } S \text{ oder auf } \Gamma_-, \\ 1, & \text{falls } (x_1,x_2) \text{ unterhalb } S \text{ oder auf } \Gamma_+, \end{cases}$$

$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u(x_1,x_2)$, $u(t) = u(x_1(t), x_2(t))$.

(5.19) **Beispiel: Ungedämpfter harmonischer Oszillator**

(vgl. (4.7)(2))



Problem: Minimiere T unter

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad 0 \le t \le T$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u(t),$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-1 \le u(t) \le 1.$$

Numerische Lösung: Das System ist normal, also ist jede optimale Steuerung bang-bang. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 + u).$$

Die adjungierten DGL

$$\dot\lambda_1 = -H_{x_1} = \lambda_2, \quad \dot\lambda_2 = -H_{x_2} = -\lambda_1$$

haben die Lösung

$$\lambda_1(t) = R\cos(t + C), \quad \lambda_2(t) = R\sin(t + C), \qquad R \neq 0.$$

Die Schaltfunktion und die optimale Steuerung sind

$$\sigma(t) = \lambda_2(t) = R\sin(t + C),$$

$$u(t) = -\operatorname{sgn}(\sigma(t)).$$

Die Schaltpunkte haben daher den Abstand π ! Die optimale Trajektorie $x(t)$ setzt sich zusammen aus Lösungen von

<u>$u(t) = 1$</u>: $\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = -x_1 + 1.$

Dies sind Kreise um $(1,0)$:

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \text{const}.$$

<u>$u(t) = -1$</u>: $\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = -x_1 - 1.$

Dies sind Kreise um $(-1,0)$:

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = \text{const}.$$

<u>Numerische Lösung im Phasenraum: Rückwärtsintegration vom Endpunkt</u>: (vgl. Beispiel (5.18))

(1) <u>$u(t) = 1$</u>:

$$\Gamma_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, \ x_2 \le 0\}$$

(2) <u>$u(t) = -1$</u>:

$$\Gamma_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1 \ \ x_2 \ge 0\}$$

5.27

Die Schaltpunkte liegen im Abstand π auf der <u>Schaltkurve</u>

$$S = (\cup \text{ Translation von } \Gamma_-) \cup$$
$$\cup (\cup \text{ Translation von } \Gamma_+)$$

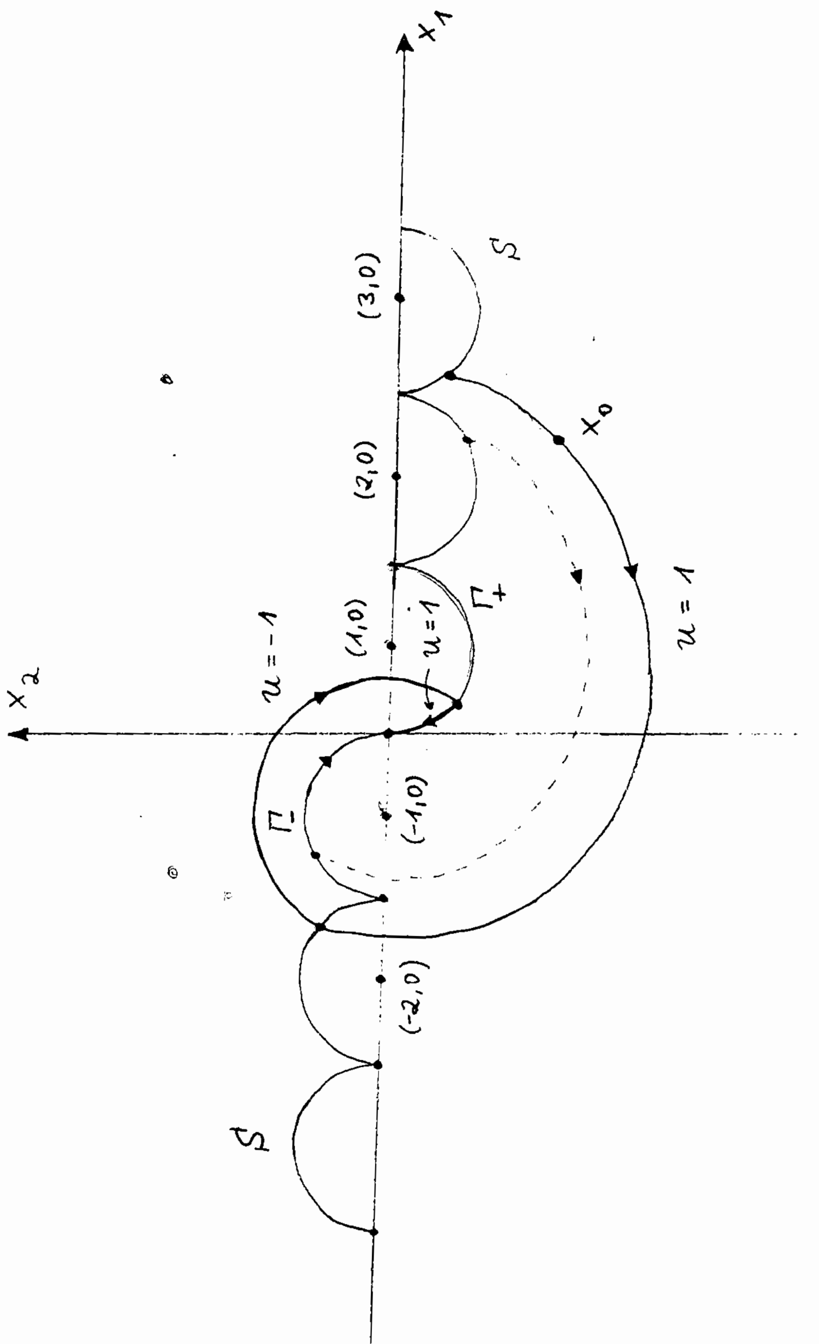
Synthese-<u>Steuerung</u> (feedback-Steuerung)

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{falls } (x_1, x_2) \text{ oberhalb } S \text{ oder auf } \Gamma_-, \\ 1, & \text{falls } (x_1, x_2) \text{ unterhalb } S \text{ oder auf } \Gamma_+ . \end{cases}$$

Mit $x = x_1$ gilt dann

$$\ddot{x} + x = u(x, \dot{x}),$$
$$u(t) = u(x(t), \dot{x}(t)).$$

5.28



Figur 5.3

(5.20) Beispiel: vgl. §1, Beispiel (2) und (4.7) (3): Erzentlader

Problem: Minimiere T unter

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u(t), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \qquad\qquad 0 \le t \le T \\ \dot{x}_4 &= -x_3 + u(t), \end{aligned}$$

$$x(0) = (0,0,0,0)^T, \quad x(T) = (1,0,0,0)^T,$$

$$-1 \le u(t) \le 1 .$$

Numerische Lösung: Das System ist normal, also ist jede optimale Steuerung bang-bang. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 x_4 + \lambda_4(-x_3 + u).$$

Die adjungierten DGL

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,$$
$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_4, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3$$

haben die Lösung

$$\lambda_1(t) \equiv A, \quad \lambda_2(t) = -At + B,$$
$$\lambda_3(t) = R\sin(t + C),$$
$$\lambda_4(t) = R\cos(t + C),$$
$$A, B, R, C \in \mathbb{R}.$$

Die Schaltfunktion lautet

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \lambda_2(t) + \lambda_4(t) \\ &= R\cos(t + C) - At + B \end{aligned}$$

und die optimale Steuerung ist damit

$$u(t) = -\operatorname{sgn}(\sigma(t)).$$

zusätzlich gilt nach (5.13)(iii)

$$H\big|_{t=T} = 1 + \sigma(T)\,u(T) = 0\,.$$

Die optimale Steuerung d.h. die Anzahl und Lage der Schaltpunkte, ist nicht analytisch berechenbar und muß daher numerisch berechnet werden.

Numerische Lösung im Zustandsraum: Mit Erfahrung und Intuition macht man den Ansatz

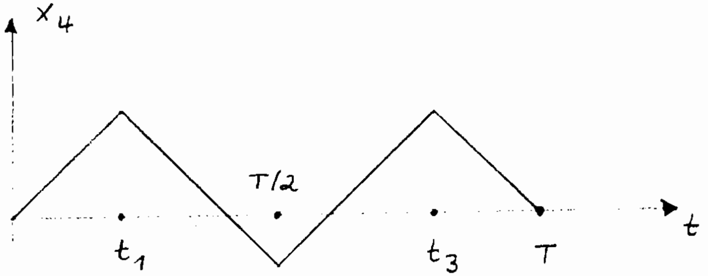
$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_1 \\ -1, & t_1 < t \le t_2 \\ 1, & t_2 < t \le t_3 \\ -1, & t_3 < t \le T \end{cases}$$

Die 4 Parameter t_1, t_2, t_3 (Schaltpunkte) und T sind dann implizit durch die 4 Endbedingungen $x(T) = (1,0,0,0)^T$ bestimmt, indem man die Zustands-DGL mit der vorgegebenen Steuerung integriert. Aus Symmetriegründen gilt hier

$$t_2 = T/2\,, \quad t_3 = T - t_1\,,$$

sodaß man nur die 2 Parameter t_1, T zu berechnen hat (z.B. mit dem Newton-Verfahren). Man erhält

$$t_1 = 0.8023\,, \quad T = 4.281\,.$$



Figur 5.4

Zur Überprüfung der Optimalitätsbedingungen kann man nachträglich die 4 Konstanten A, B, C, R in den adjungierten Variablen berechnen aus

$$\sigma(t_i) = R\cos(t_i + C) - At_i + B = 0,$$
$$i = 1,2,3,$$

$$H|_{t=T} = 1 - \sigma(T) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad A = -1.01726, \quad B = -2.17791,$$
$$C = -0.570160, \quad R = 1.39926.$$

§6 Das PONTRYAGIN'sche Minimumprinzip

Ausgangspunkt ist der optimale Steuerprozeß (2.5) mit den Standard Randbedingungen (2.2.6):

$$
(6.1)\quad \boxed{\begin{aligned}
&\min\; g(x(T)) + \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt \\
&\dot{x} = f(t,x,u), \quad 0 \le t \le T \\
&x(0) = x_0, \quad \psi(x(T)) = 0 \\
&u(t) \in \mathcal{U}.
\end{aligned}}
$$

Die Endzeit T ist fest oder frei. Dem Problem (6.1) wird die Hamilton-Funktion

$$
(6.2)\quad H(t,x,\lambda,u) := \lambda_0 f_0(t,x,u) + \lambda f(t,x,u), \quad \lambda_0 \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^n,
$$

zugeordnet. Der Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n$ heißt adjungierte Variable oder Kozustand. Die Zahl λ_0 wird nicht im Argument von H mitgeführt, da sie nur die Werte 0 und 1 annimmt; im "Normalfall" gilt $\lambda_0 = 1$.

Die folgenden notwendigen Optimalitätsbedingungen sind das zentrale Resultat der Theorie optimaler Steuerprozesse.

(6.3) Minimumprinzip von PONTRYAGIN

Sei (x^*, u^*) eine optimale Lösung von (6.1). Dann gibt es eine Zahl $\lambda_0 \ge 0$, eine stetige und stückweise stetig

$*\ \lambda(T) = \lambda_0\, g_x(x^*(T)) + \vartheta\, \psi_x(x^*(T)).$

differenzierbare Funktion $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ und einen Zahlenvektor $\nu \in \mathbb{R}^r$ mit $(\lambda_0, \lambda(t), \nu) \neq 0$ für $t \in [0,T]$, so daß die folgenden Aussagen gelten:

An allen Stellen $t \in [0,T]$, wo $u^*(\cdot)$ stetig ist, gelten die Minimumbedingung

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*(t), \lambda(t), u)$$

und die adjungierten DGL

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)).$$

Im Endzeitpunkt T gilt die Transversalitätsbedingung

~~$\lambda(T) = \lambda_0\, g_x(x^*(T)) + \nu\, \psi_x(x^*(T))$~~ $\star$

Im Falle freier Endzeit gilt für die optimale Endzeit T^*

$$H(T^*, x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T^*)) = 0.$$

Für autonome Probleme gilt außerdem

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const.} \quad \text{in } [0,T].$$

Ein Beweis findet sich in KNOBLOCH/KAPPEL (1974), Kap. VI; LEE/MARKUS (1967).

Entlang einer optimalen Lösung $t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)$ verwenden wir die Bezeichnungen

$$f(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)),$$

$$H(t) = H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)), \text{ etc.}$$

Die adjungierten DGL lauten dann explizit

$$\boxed{\dot{\lambda}(t) = -H_x(t) = -\lambda_0 f_{0x}(t) - \lambda f_x(t)} \,.$$

Im Falle $\lambda_0 > 0$ kann man $\lambda_0 = 1$ im Minimumprinzip (6.3) setzen, denn die Aussagen in (6.3) bleiben bei einer Skalierung

$$\lambda \to \lambda / \lambda_0$$

unverändert. Zum Nachweis von $\lambda_0 > 0$ benötigt man zusätzliche Regularitätsannahmen für die optimale Lösung x^*, u^*.
Der "abnormale Fall" $\lambda_0 = 0$ kann bei konkreten Problemen auch dadurch ausgeschlossen werden, daß man den Ansatz $\lambda_0 = 0$

zum Widerspruch führt. Für eine wichtige Modellklasse kann dies generell durchgeführt werden.

(6.4) Korollar:

Bei freiem Endzustand $x(T)$, d.h. $\psi \equiv 0$, kann $\lambda_0 = 1$ in (6.3) gesetzt werden.

Beweis: Aus dem Ansatz $\lambda_0 = 0$ würde mit $\psi = 0$ in (6.3) folgen

$$\dot{\lambda} = -\lambda f_x(t), \quad \lambda(T) = 0 .$$

Diese lineare DGL hat die eindeutig bestimmte Lösung $\lambda(t) \equiv 0$. Damit gilt $(\lambda_0, \lambda(t)) \equiv 0$ im Widerspruch zur Aussage $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq 0$ für $t \in [0,T]$ in (6.3). ∎

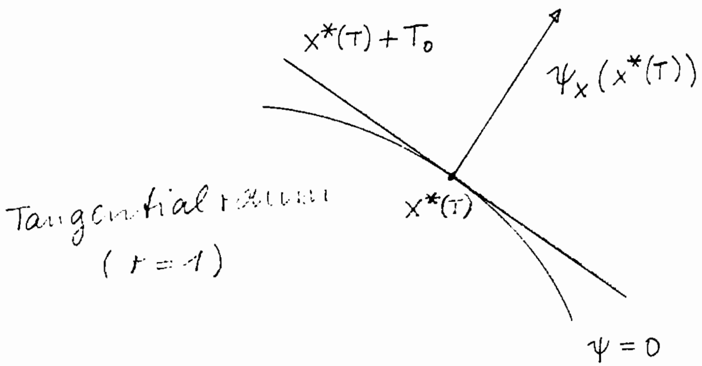
zur Erläuterung der Transversalitätsbedingungen

$$\lambda(T) = \lambda_0 g_x(x^*(T)) + \nu \psi_x(x^*(T))$$

sei

$$T_0 := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \psi_x(x^*(T)) v = 0 \}$$

der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $\psi(x) = 0$ im Punkte $x^*(T)$.



Die Transversalitätsbedingung besagt dann

$$\lambda(T) - \lambda_0 g_x(x^*(T)) \perp T_0 .$$

Bei praktischen Problemen liegt meistens der folgende <u>Spezialfall</u> vor

$$x_i(T) = c_i \,, \quad i = 1,..,r, \quad r \le n$$

$$\Rightarrow \psi(x) = (x_1 - c_1, .., x_r - c_r)^T,$$

$$g(x) = g(x_{r+1}, .., x_n) .$$

Hier erhält man

$$\lambda_i(T) = \nu_i \,, \quad i = 1,..,r$$

$$\lambda_i(T) = \lambda_0 g_{x_i}(x^*(T)), \quad i = r+1,..,n .$$

Also ist

$$\lambda_i(T) \quad \text{frei}, \quad i = 1,..,r .$$

Insgesamt lauten daher die Endbedingungen

$$\text{(6.5)} \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_i(T) = c_i \,, & i = 1,..,r, \\ \lambda_i(T) = \lambda_0 g_{x_i}(x^*(T)), & i = r+1,..,n \end{array}}$$

Sei nun

(6.6) $u^*(t,x,\lambda) = \underset{u \in \mathcal{U}}{\arg\min}\, H(t,x,\lambda,u)$

die (nicht notwendig eindeutig bestimmte) Minimalstelle von $H(t,x,\lambda,\cdot)$ bzgl. $u \in \mathcal{U}$. Gemäß der Minimumbedingung in (6.3) gilt dann für die optimale Steuerung

$$u^*(t) = u^*(t, x^*(t), \lambda(t)).$$

Die Vorgehensweise zur numerischen Berechnung der optimalen Steuerung besteht nun im folgenden: man bestimme die Funktion $u^*(t,x,\lambda)$ und löse ein geeignetes Randwertproblem für x, λ

$$\dot{x} = f, \quad \dot{\lambda} = -H_x, \quad x(0)=x_0,$$
Endbedingungen (6.5).

Diese Vorgehensweise wird in den folgenden Abschnitten an verschiedenen Modellklassen und Beispielen erläutert.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen (6.3) sind unter zusätzlichen Konvexitätsannahmen auch hinreichend. Dazu werde $\lambda_0 = 1$ angenommen. Sei

(6.7) $H^0(t,x,\lambda) := \min_{u \in \mathcal{U}} H(t,x,\lambda,u)$

die minimierte Hamilton-Funktion.

(6.8) Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Sei (x^*, u^*) ein zulässiges Paar für das Problem (6.1).

$\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}^r$,
sodaß die Bedingungen von
(6.2) mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt sind.
zusätzlich sei

(a) $\psi(x)$ affin-linear,

(b) $g(x)$ konvex,

(c) $H^0(t, x, \lambda)$ konvex in x für jedes $(t, \lambda(t))$.

Dann ist (x^*, u^*) eine optimale Lösung.

Ein Beweis findet sich in TEICHTINGER / HARTL (1986), § 2.5, § 7.1, Satz 7.1 .

* Problem (6.1) mit $f_0 \equiv 0$, d.h.

6.2 Äquivalente Formulierungen von Steuerprozessen

Zum Verständnis der wesentlichen Beweisideen des Minimumprinzips (6.3) ist es zweckmäßig, den Steuerprozeß (6.1) äquivalent umzuformen. Die dabei erzielten Vereinfachungen sind auch bedeutsam für die numerische Lösung.

Das Problem (6.1) mit $g \equiv 0$, d.h. mit Zielfunktional

$$(6.9) \qquad F(x,u) = \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt,$$

heißt LAGRANGE-Problem; das *

* $\bar f(t,\bar x,u) = (f_0,\dots,f_n)^T(t,x,u)$, $\bar x_0 = \binom{0}{x_0}$, $\bar\psi(\bar x) = \psi(x)$,

$$(6.10) \qquad F(x,u) = g(x(T)),$$

heißt MAYER-Problem.

(a) Rückführung von (6.1) auf ein MAYER-Problem

Man definiere eine neue Zustandsvariable $x_0(t)$ durch

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(s,x(s),u(s))\,ds;$$

x_0 genügt der AWA

$$(6.11\,a) \qquad \dot x_0 = f_0(t,x,u), \quad x_0(0) = 0.$$

Setzt man

$$\bar x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad *$$

*

so ist (6.1) äquivalent zu dem MAYER-Problem

(6.11 b)

Minimiere $\bar{g}(\bar{x}(T)) = g(x(T)) + x_0(T)$
unter $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, u)$
$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \; \bar{\psi}(\bar{x}(T)) = 0,$
$u(t) \in \mathcal{U}$

(b) <u>Rückführung von (6.1) auf ein LAGRANGE-Problem</u>

Die Endzeit T sei fest, sonst wende man den folgenden Fall (c) an. Definiere eine konstante Funktion $x_0(t)$ durch

(6.12 a) $\dot{x}_0 = 0, \; x_0(T) = g(x(T))/T.$

Damit wird

$$g(x(T)) + \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt$$
$$= \int_0^T (x_0(t) + f_0(t,x,u))\,dt.$$

Mit

$$\bar{x} = (x_0, x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\bar{f}(t,\bar{x},u) = (0, f_1, .., f_n)^T(t,x,u),$$
$$\bar{f}_0(t,\bar{x},u) = x_0 + f_0(t,x,u),$$
$$x_0(0) \text{ frei}, \quad x(0) = x_0 \quad ,$$
$$\bar{\psi}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ x_0 - g(x)/T \end{pmatrix}$$

geht (6.1) in ein LAGRANGE-Problem über mit Zielfunktional

(6.12 b) $\bar{F}(\bar{x},u) = \int_0^T \bar{f}_0(t,\bar{x},u)\,dt.$

(c) Rückführung einer freien Endzeit T auf eine feste Endzeit $\tilde{T} = 1$

Man führe eine neue Zeitvariable $s \in [0,1]$ ein durch

(6.13) $\quad t = sT, \quad 0 \le s \le 1,$

und definiere (Verwechslungen bei gleicher Bezeichnung sind nicht zu befürchten)

$$x(s) = x(sT), \; u(s) = u(sT), \quad 0 \le s \le 1.$$

Bzgl. der Variablen s gilt

(6.14)
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = T\frac{dx}{dt} = T f(sT, x(s), u(s)), \\ &g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\,dt \\ &= g(x(1)) + T\int_0^1 f_0(sT, x(s), u(s))\,ds \end{aligned}}$$

Zusätzlich benötigt man die Zustandsvariable $x_{n+1}(s) \equiv T$, für die

$$\frac{dx_{n+1}}{ds} = 0, \quad x_{n+1}(0),\, x_{n+1}(1) \text{ frei}.$$

Für $\bar{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x_{n+1}(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ erhält man dann einen Steuerprozeß mit fester Endzeit $\tilde{T} = 1$ und Randbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad x_{n+1}(0) \text{ frei},$$
$$\bar{\psi}(\bar{x}(1)) = \psi(x(T)) = 0.$$

<u>Beispiel:</u> Das zeitoptimale Problem (1.1)

$$\min T$$
$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\right., \; x(0) = x_0, \; x(T) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$-1 \le u(t) \le 1, \quad 0 \le t \le T$$

wird mit $x_3(s) = T$ transformiert zu

$$\min \; x_3(1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \cdot u \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = x_0, \quad \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-1 \le u(s) \le 1, \qquad 0 \le s \le 1.$$

(d) Rückführung von nichtautonomen auf autonome Systeme

Gemäß (c) kann man sich auf eine feste Endzeit T beschränken. Man definiert die neue Zustandsvariable $x_{n+1}(t) \equiv t$, also

$$(6.15) \qquad \dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(0) = 0.$$

Für $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$

gewinnt man so ein autonomes Problem mit

$$\bar{f}_0(\bar{x}, u) = f_0(x_{n+1}, x, u),$$

$$\bar{f}(\bar{x}, u) = \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, x, u) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x).$$

Aufgrund der Überlegungen in (a)-(d) kann man statt (6.1) das folgende autonome Problem in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit fester Endzeit T betrachten

$$(6.16) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & F(x,u) = x_0(T) \\ \text{unter} & \dot{x} = f(x,u), \\ & x(0) = x_0, \quad \psi(x(T)) = 0, \\ & u(t) \in \mathcal{U}. \end{array}}$$

* Bei nichtlinearen Prozessen (6.17) ist $K(t)$ i.a. nicht konvex, auch

Zur Vereinfachung ist hierbei allerdings im Gegensatz zu den Fällen (b), (c) auch der Anfangszustand fest gegeben.

6.3 Der Erreichbarkeitskegel

Gegeben sei der autonome Steuerprozeß in $\mathbb{R}^n$

(6.17) $\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0,$
$u(t) \in U.$

Die zugehörige erreichbare Menge im Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist

$$K(t) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } u : [0,t] \to U \text{ mit } x(t) = x \}.$$

~~Bei nichtlinearen~~ *

* werde mit $x(t; s, a)$ bezeichnet. Für $a = x^*(s)$ gilt $x^*(t) = x(t; s, x^*(s))$.

wenn U konvex ist. In einem Punkt $x^* \in K(t)$ sucht man daher eine konvexe Approximation von $K(t)$. Sei dazu $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ eine feste Trajektorie von (6.17). Ziel ist nun die Approximation von $K(t)$ in $x^*(t)$ durch einen konvexen Kegel

$$x^*(t) + K_t,$$

K_t: Erreichbarkeitskegel.

Zur Beschreibung von K_t benötigt man einige Resultate aus der Theorie der Differentialgleichungen.

Die Lösung der AWA

$$\dot{x} = f(x, u^*(t)), \quad x(s) = a$$

*

Sei $\phi(t,s)$ die Übergangsmatrix zu dem homogenen System von linearen DGL (Variationsgleichung)

$$\dot{y} = A(t)\,y\,,$$
$$A(t) := f_x(x^*(t), u^*(t))$$
stückweise stetig.

ϕ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar und erfüllt die AWA

$$\dot{\phi} = A(t)\,\phi\,, \quad \phi(s,s) = I\,.$$

Es besteht dann die Beziehung (vgl. KNOBLOCH / KAPPEL, Kap. III, §3)

$$(6.18)\quad \frac{\partial x}{\partial a}(t;s,a^*) = \phi(t,s), \quad a^* = x^*(s).$$

Für eine C^1-Kurve $a(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [-\delta,\delta]$,

mit

$$\frac{da}{d\varepsilon}(0) = v \in \mathbb{R}^n$$

folgt daraus

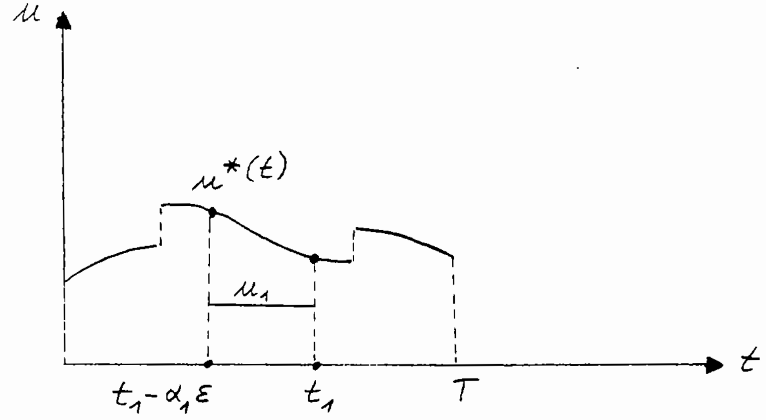
$$(6.19)\quad \left.\frac{dx(t;s,a(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \phi(t,s)\,v\,.$$

Sei nun $u^*(t)$ stetig in $t_1 \in (0,T)$; ein solcher Punkt t_1 heißt regulär. Zu vorgegebenen Störungsdaten

$$\pi_1 := (t_1, \alpha_1, u_1)\,, \quad \alpha_1 \geq 0\,, \quad u_1 \in \mathcal{U}\,,$$

betrachten wir die folgende Störung der Funktion $u^*(t)$ zu $\varepsilon > 0$:

$$(6.20)\quad u_{\pi_1}(t,\varepsilon) = \begin{cases} u_1\,, & t_1 - \alpha_1\varepsilon \leq t \leq t_1 \\ u^*(t) & \text{sonst} \end{cases}$$



Die zu $u_{\pi_1}(t,\varepsilon)$ gehörige Trajektorie sei $x_{\pi_1}(t,\varepsilon)$ mit $x_{\pi_1}(0,\varepsilon)=x_0$.

(6.21) <u>Hilfssatz</u>: Für $t \geq t_1$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial x_{\pi_1}}{\partial \varepsilon}(t,0)\\ &= \alpha_1 \phi(t,t_1)\{f(x^*(t_1),u_1)\\ &\qquad -f(x^*(t_1),u^*(t_1))\}.\end{aligned}}$$

<u>Beweis:</u> Die Stetigkeit von $u^*(t)$ in t_1 bewirkt, daß

$$\begin{aligned}x_{\pi_1}(t_1,\varepsilon) &= x^*(t_1-\alpha_1\varepsilon)\\ &\quad + \int_{t_1-\alpha_1\varepsilon}^{t_1} f(x_{\pi_1}(s,\varepsilon),u_1)\,ds\\ &= x^*(t_1)-\alpha_1\varepsilon\dot{x}^*(t_1)\\ &\quad +\alpha_1\varepsilon f(x^*(t_1-\alpha_1\varepsilon),u_1)+o(\varepsilon)\\ &= x^*(t_1)+\varepsilon\alpha_1\{f(x^*(t_1-\alpha_1\varepsilon),u_1)\\ &\quad -f(x^*(t_1),u^*(t_1))\}+o(\varepsilon),\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial x_{\pi_1}}{\partial \varepsilon}(t_1,0)=\alpha_1\{f(x^*(t_1),u_1)-f(x^*(t_1)u^*(t_1))\}.$$

Mit (6.19) folgt dann

$$\frac{\partial x_{\pi_1}}{\partial \varepsilon}(t,0)=\phi(t,t_1)\frac{\partial x_{\pi_1}}{\partial \varepsilon}(t_1,0)$$

und damit die Beh.. ■

Zu k regulären Punkten $t_1,..,t_k \in (0,T)$, $t_i < t_{i+1}$, definiert man Störungsdaten

$$\pi = (t_1,..,t_k, \alpha_1,..,\alpha_k, u_1,..,u_k),$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad u_i \in \mathcal{U} \quad (i=1,..,k).$$

Setze dann für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$u_\pi(t,\varepsilon) = \begin{cases} u_i, & t_i - \alpha_i \varepsilon \leq t \leq t_i, \\ & (i=1,..,k) \\ u^*(t) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die zugehörige Trajektorie $x_\pi(t,\varepsilon)$ zeigt man induktiv für $t \geq t_k$:

$$(6.22) \quad \frac{\partial x_\pi}{\partial \varepsilon}(t,0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \phi(t,t_i)\{f(x^*(t_i),u_i) - f(x^*(t_i),u^*(t_i))\}.$$

Dies motiviert die folgende

(6.23) <u>Definition</u>: Sei $t \in (0,T)$. Der zur Trajektorie $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ gehörende <u>Erreichbarkeitskegel</u> K_t von $K(t)$ im Punkte $x^*(t)$ ist die Menge

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \phi(t,t_1)\{f(x^*(t_i)u_i) - f(x^*(t_i),u^*(t_i))\} \;\Big|\; \alpha_i \geq 0, u_i \in \mathcal{U}, \ t_i \in (0,t) \text{ regulär}, \ i=1,..,k, \ k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

K_t ist ein konvexer Kegel, erzeugt von den Vektoren $\phi(t,t_i)v$ mit $v = f(x^*(t_i),u_i) - f(x^*(t_i),u^*(t_i))$. Nach (6.22) gibt es zu $v \in K_t$ eine Kurve

$$(6.24) \quad \boxed{\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = x^*(t) + \varepsilon v + o(\varepsilon) \in K(t), \\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0(v). \end{aligned}}$$

6.4 Beweis des Minimumprinzips in einem Spezialfall

Wir legen den zu (6.1) äquivalenten Steuerprozeß (6.16) in $\mathbb{R}^{n+1}$ zugrunde und nehmen zusätzlich an, daß der Endzustand $x(T)$ frei ist:

$$(6.25)\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Minimiere } F(x,u) = x_0(T) \\ \text{unter } \dot{x} = f(x,u),\ x(0) = x_0 \\ \qquad u(t) \in \mathcal{U},\ 0 \le t \le T \end{array}}$$

Sei $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ eine optimale Lösung und sei $K_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Erreichbarkeitskegel (6.23) von $K(t)$ in $x^*(t)$, $0 < t \le T$.

Das Minimumprinzip beruht auf der einfachen Aussage, daß $v_0 = (1,0\ldots0) \notin K_T$

Zum Beweis dieser Aussage beachte man, daß nach (6.24) eine Kurve

$$x(T,\varepsilon) = x^*(T) + \varepsilon v_0 + o(\varepsilon) \in K(T),$$
$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0(v_0)$$

existiert. Nach Definition von v_0 besagt dies

$$x_0(T,\varepsilon) = x_0^*(T) - \varepsilon + o(\varepsilon) < x_0^*(T)$$
$$\text{für } \varepsilon > 0 \text{ klein}$$

im Widerspruch zur Minimalität von $x_0^*(T)$. Also gilt $v_0 \notin K_T$.

Nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen (vgl. etwa KNOBLOCH / KAPPEL, Kap VI, §2) gibt es einen Zeilenvektor $\lambda^* \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda^* \neq 0$, mit

$$\lambda^* v \ge 0 \quad \text{für alle } v \in K_T$$
$$\lambda^* v = -\lambda_0^* \le 0, \quad \text{d. h. } \lambda_0^* \ge 0.$$

$*$ $H(x^*(t),\lambda(t),u^*(t)) = \min_{u\in\mathcal{U}} H(x^*(t),\lambda(t),u)$
(6.28)

$*$ (6.28) für alle $t\in[0,T]$ gilt; dazu führe man einen Grenzübergang $t_k\to t$, t_k regulär,

Nach Def. (6.23) heißt dies

$$\lambda^*\phi(T,t)\{f(x^*(t),u) - f(x^*(t),u^*(t))\} \geq 0 \qquad (6.26)$$

für alle $u\in\mathcal{U}$, $t\in(0,T)$ regulär.

Wie im Fall linearer Steuerprozesse (vgl. (5.8)) führt man die adjungierte Variable ein durch

$$(6.27)\quad \lambda(t) := \lambda^*\phi(T,t).$$

Für die HAMILTON-Funktion

$$H(x,\lambda,u) = \lambda f(x,u)$$

ergibt sich damit aus (6.26) die Minimumbedingung in Satz (6.3) für t regulär: $*$

Die adjungierte Variable genügt der DGL

$$\dot\lambda = -\lambda f_x(x^*(t),u^*(t)) = -H_x(x^*(t),\lambda,u^*(t)). \qquad (6.29)$$

Für die Funktion

$$H(t) = H(x^*(t),\lambda(t),u^*(t))$$

zeigen wir nun

(a) $H(t)$ ist stetig in $[0,T]$,

(b) $\dot H(t) = 0$ für t regulär.

Hieraus folgt dann

$$H(t) = \text{const.} \quad \text{in } [0,T].$$

Zunächst überlegt man, daß die Ungleichung (6.26) und damit

$*$ (6.28) für alle $t\in[0,T]$ gilt.

durch. Für $t, t_0 \in [0,T]$ folgt dann aus (6.28)

$$
\begin{aligned}
& H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t_0)) \\
& \quad - H(x^*(t_0), \lambda(t_0), u^*(t_0)) \\
(6.30) \quad & \geq H(t) - H(t_0) \\
& \geq H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) \\
& \quad - H(x^*(t_0), \lambda(t_0), u^*(t)).
\end{aligned}
$$

Also ist $H(t)$ stetig in t_0, da $x^*(t), \lambda(t)$ stetig sind.

Betrachte nun die Funktion

$$h(t,u) = H(x^*(t), \lambda(t), u), \quad u \in \mathcal{U}.$$

Unter Benutzung der adjungierten DGL (6.29) erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t}(t, u^*(t)) &= H_x(t)\,\dot{x}^*(t) + H_\lambda(t)\,\dot{\lambda}(t)^T \\
&= H_x(t)\,H_\lambda(t)^T + H_\lambda(t)\,(-H_x(t)^T) \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Abschätzung (6.30) zeigt dann zusammen mit dem Mittelwertsatz die Aussage: zu $t_0 < t$ gibt es t_1, t_2 zwischen t und t_0 mit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t}(t_1, u^*(t_0)) &\geq \frac{H(t) - H(t_0)}{t - t_0} \\
&\geq \frac{\partial h}{\partial t}(t_2, u^*(t)).
\end{aligned}
$$

Für $t \to t_0$ konvergieren die linke und rechte Seite gegen Null, also gilt $\dot{H}(t_0) = 0$. Damit ist Satz (6.3) für das spezielle Problem (6.25) gezeigt.

Der Beweis von (6.3) im

Falle ... Endbedingung $\psi(x(T)) = 0$

benutzt ähnliche Ideen, ist jedoch technisch wesentlich schwieriger; vgl. KNOBLOCH / KAPPEL, S. 289, Satz 4.1.

Zur Übertragung der Ergebnisse für das spezielle Problem (6.25) auf das allgemeine Problem (6.1) ist es erforderlich, die äquivalenten Transformationen (a)-(d) in § 6.2 rückgängig zu machen. Beispielsweise wird man für das Zielfunktional

$$F(x,u) = \int_0^T f_0(t,x,u)\,dt = x_0(T)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ auf die HAMILTON-Funktion

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda_0 f_0(t,x,u) + \lambda f(t,x,u)$$

geführt mit $\lambda_0 \geq 0$. Im Falle $\lambda_0 > 0$ kann hier $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden.

§ 7 Probleme mit linear auftretender Steuerung: bang-bang und singuläre Steuerungen

Ausgehend von dem Steuerprozeß (6.1) betrachten wir nun eine Modellklasse, bei der die Steuerung u linear in der Dynamik und im Zielfunktional auftritt:

$$f(t,x,u) = a(t,x) + b(t,x)u \,,$$

$a(t,x)$ $n \times 1$ Vektor,

$b(t,x)$ $n \times m$ Matrix,

$$f_0(t,x,u) = a_0(t,x) + b_0(t,x)u \,,$$

$a_0(t,x)$ skalar

$b_0(t,x)$ $1 \times m$ Vektor.

Für den Steuerbereich gelte

U konvex, kompakt.

Diese Modellklasse enthält die in § 5 behandelten zeitoptimalen linearen Steuerprozesse als Spezialfall.

Im folgenden sei eine optimale Lösung mit $x(\cdot), u(\cdot)$ bezeichnet und es gelte $\lambda_0 = 1$ im Minimumprinzip (6.2). Die Hamilton-Funktion ist (affin)-linear bzgl. u und hat die Form

$$\begin{aligned} H(t,x,\lambda,u) &= f_0(t,x,u) + \lambda f(t,x,u) \\ &= a_0(t,x) + \lambda a(t,x) \\ &\quad + [b_0(t,x) + \lambda b(t,x)]\,u \,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die Schaltfunktion wird definiert durch

$$\sigma(t,x,\lambda) := H_u(t,x,\lambda,u)$$

$$(7.2) \qquad = b_0(t,x) + \lambda b(t,x),$$

$$\sigma(t) := \sigma(t, x(t), \lambda(t))$$

$$= (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)).$$

Die Minimierung der Hamilton-Funktion

$$H(t, x(t), \lambda(t), u(t))$$

$$= \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x(t), \lambda(t), u), \quad t \in [0,T],$$

ist dann äquivalent zu dem <u>linearen Optimierungsproblem</u>

$$(7.3) \qquad \boxed{\min_{u \in \mathcal{U}} \sigma(t) u = \sigma(t) u(t)}$$

für alle $t \in [0,T]$

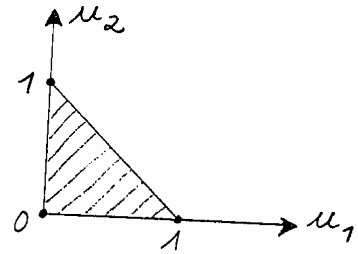
Typische Beispiele für einen konvexen, kompakten Steuerbereich $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ sind:

(1) $m = 1$: $\mathcal{U} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ <u>Intervall</u>,

(2) $m \geq 1$: $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq u_i \leq b_i,$
$a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1,..,m\}$

<u>Quader</u>,

(3) $m = 2$: $\mathcal{U}$ <u>Simplex</u>



Zur Vereinfachung beschränken wir uns nun auf den Fall

<u>$m = 1$: $\mathcal{U} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall</u>.

Hier reduziert sich (7.3) auf

* Stellen von $\sigma(t)$ heißen Schaltpunkte.

* singuläre Steuerung ausgeschlossen werden

$$\min_{u\in[a,b]} \sigma(t)u = \sigma(t)u(t)$$

und daher ist die optimale Steuerung gegeben durch

$$u(t) = \begin{cases} a & \sigma(t)>0 \\ b & \sigma(t)<0 \\ \text{unbestimmt} & \sigma(t)=0 \end{cases} \tag{7.4}$$

(7.5) Definition: Sei $[t_1,t_2]\subset[0,T]$, $t_1<t_2$.

(i) $u(t)$ heißt bang-bang in $[t_1,t_2]$, wenn $\sigma(t)$ in $[t_1,t_2]$ nur isolierte Nullstellen hat, d.h. $u(t)\in\{a,b\}$. Die Null-

(ii) $u(t)$ heißt singulär in $[t_1,t_2]$, falls $\sigma(t)\equiv 0$ in $[t_1,t_2]$. Die Zeitpunkte t_1,t_2 heißen Verbindungspunkte, falls $u(t)$ bang-bang in $[t_1-\varepsilon]$, $[t_2+\varepsilon]$ für $\varepsilon>0$ geeignet.

Bei zeitoptimalen linearen Steuerprozessen garantierte die Normalitätsbedingung in (5.16)(ii) bzw. (5.17), daß die optimale Lösung bang-bang (in $[0,T]$) ist und keine singulären Teilstücke enthält. Hingegen gibt es bei der vorliegenden allgemeinen Modellklasse kein Kriterium für bang-bang-Steuerungen; nur in speziellen Fällen können

(7.6) Beispiel: Maschinenreparatur-Problem

Es bedeuten

T : Nutzungsdauer einer Maschine oder Anlage,

$x(t)$: Qualität oder Zustand zur Zeit t, $0 \leq x(t) \leq 1$,

$u(t)$: Steuerung, die den Reparaturaufwand oder die Wartungskosten ausdrückt, $0 \leq u(t) \leq \bar{u}$,

δ: Verschleiß- oder Abnutzungsrate der Maschine,

g: Reparatureffektivitäts-Koeffizient,

π: Produktionsrate der Maschine.

Damit lautet das Modell

$$\max. \; J = \int_0^T (\pi x(t) - u(t))\, dt$$

unter

$$\dot{x} = -\delta x + g u,$$

$$x(0) = 1,$$

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u}.$$

Setzt man zusätzlich voraus

$$g\bar{u} < \delta,$$

so folgt

$$x(t) \in [0,1] \quad \text{für } t \in [0,T].$$

Der Endzustand $x(T)$ ist frei, also kann man $\lambda_0 = 1$ in der Hamilton-Funktion setzen:

$$H = -(\pi x - u) + \lambda(-\delta x + g u)$$

$$= -(\pi + \delta\lambda) x + (1 + g\lambda) u.$$

Die adjungierte DGL

$$\dot{\lambda} = -H_x = \pi + \delta\lambda,$$
$$\lambda(T) = 0$$

hat die Lösung

$$\lambda(t) = \frac{\pi}{\delta}\left(e^{\delta(t-T)} - 1\right).$$

Die Schaltfunktion

$$\sigma(t) = 1 + g\lambda(t)$$

ist daher streng monoton wachsend in $[0,T]$ und hat höchstens eine Nullstelle $t_1 \in [0,T]$. Wegen $\lambda(T) = 0$, $\sigma(T) = 1$ ist die optimale bang-bang-Steuerung gegeben durch

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}, & 0 \le t \le t_1 \\ 0, & t_1 < t \le T \end{cases}$$

Die isolierte Nullstelle t_1 von $\sigma(t)$ ergibt sich zu

$$t_1 = T + \frac{1}{\delta}\ln\left(1 - \frac{\delta}{\pi g}\right).$$

Damit t_1 wohldefiniert ist und $t_1 \in (0,T)$ gilt, muß man voraussetzen

$$\delta < \pi g, \quad \frac{1}{\delta}\ln\left(1 - \frac{\delta}{\pi g}\right) < T.$$

Die Steuerung $u(t)$ und die zugehörige Trajektorie

$$x(t) = \begin{cases} \frac{g\bar{u}}{\delta} + \left(1 - \frac{g\bar{u}}{\delta}\right)e^{-\delta t}, & 0 \le t \le t_1 \\ x(t_1)\,e^{-\delta(t-t_1)}, & t_1 < t \le T \end{cases}$$

sind optimal, da die hinreichenden Optimalitätsbedingungen (6.8) erfüllt sind.

Singuläre Steuerungen können dann auftreten, wenn die Zustandsvariable x nichtlinear in die Hamilton-Funktion eingeht.

(7.7) Beispiel:

Minimiere $\frac{1}{2}\int_0^T x^2\,dt$

unter $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(T) = 1$

$-1 \leq u \leq 1$.

Die Anwendung des Minimumprinzips ergibt

$H = \frac{1}{2}x^2 + \lambda u$,

$\dot{\lambda} = -H_x = -x$,

$\sigma = \sigma(t, x, \lambda) = \lambda$ Schaltfunktion

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \lambda(t) > 0 \\ 1, & \lambda(t) < 0 \\ \text{singulär}, & \lambda(t) \equiv 0 \end{cases}$$

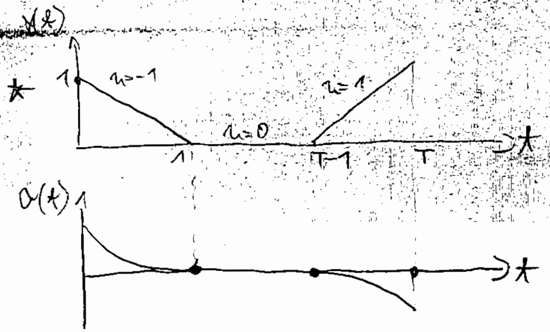
Berechnung der singulären Steuerung:

$\sigma(t) = \lambda(t) \equiv 0$

$\Rightarrow \sigma^{(1)} := \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\lambda} = -x = 0$

$\Rightarrow \sigma^{(2)} := \frac{d\sigma^{(1)}}{dt} = -\dot{x} = -u = 0$.

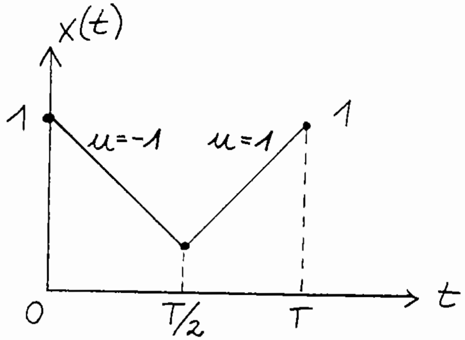
Also ist $u(t) = 0$ die singuläre Steuerung. Jedoch kann apriori nicht entschieden werden, ob eine singuläre Steuerung tatsächlich auftritt; dies hängt entscheidend von der Endzeit T und den Randwerten ab.



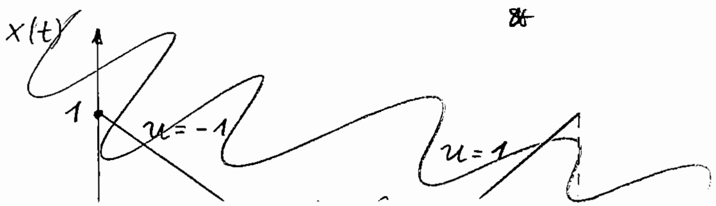
* Die Funktionen f_0, f seien hinreichend oft diff'bar.
Nach Def. gilt für eine singuläre

Im vorliegenden Fall kann man die optimale Lösung sofort erraten:

<u>$T \leq 2$:</u> bang-bang Steuerung



<u>$T > 2$:</u> bang-singulär-bang Steuerung



Die Lösung ist analytisch:

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq T-1 \\ t-(T-1), & T-1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq T-1 \\ -\frac{1}{2}(t-T+1)^2, & T-1 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \lambda(t), \quad \sigma(1) = \dot{\sigma}(1) = 0.$$

Das vorige Beispiel zeigt bereits die prinzipielle Methode zur Berechnung singulärer Steuerungen. *

$$* \quad \boxed{u(t) = -\frac{A(t, x(t), \lambda(t))}{B(t, x(t), \lambda(t))}}$$

Steuerung

$$\sigma(t) = \sigma(t, x(t), \lambda(t)) = 0$$

$$\text{in } [t_1, t_2] \subset [0, T].$$

Man definiert Funktionen

$$\sigma^{(k)}, \quad 0 \le k \le \bar{k} \le \infty$$

durch:

(a) $\sigma^{(0)} := \sigma(t, x, \lambda)$

(b) für $k \ge 0$ sei $\sigma^{(k)}$ definiert und $\sigma^{(k)} = \sigma^{(k)}(t, x, \lambda)$ sei unabhängig von u, d.h.

$$\frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial u} \equiv 0 .$$

Setze

$$\sigma^{(k+1)} = \frac{d\sigma^{(k)}}{dt} = \sigma_t^{(k)} + \sigma_x^{(k)} \dot{x} + \sigma_\lambda^{(k)} \dot{\lambda} .$$

[illegible] Entweder gilt dann

$$\sigma_u^{(k)} \equiv 0 \qquad \forall \ k \ge 0$$

oder

$$\sigma_u^{(k)} \equiv 0, \quad k = 0, .., \bar{k}-1, \quad (\bar{k} \ge 1),$$

$$\sigma_u^{(\bar{k})} \not\equiv 0 .$$

Für $\bar{k} < \infty$ gilt

$$\sigma^{(\bar{k})} = A(t, x, \lambda) + B(t, x, \lambda)\, u ,$$

da u linear auftritt. Eine singuläre Steuerung $u(t)$ ist also charakterisiert durch

$$(7.8) \quad \begin{aligned} &\sigma^{(k)}(t, x(t), \lambda(t)) = 0, \quad k = 0, .., \bar{k}-1, \\ &\sigma^{(\bar{k})}(t, x(t), \lambda(t), u(t)) = 0 . \end{aligned}$$

Im Falle $B(t, x(t), \lambda(t)) \neq 0$ folgt

$*$

(7.10) Satz:

(i) Ist $\bar{k} < \infty$, so ist $\bar{k} = 2q$ eine gerade Zahl. Die Zahl $q \geq 1$ heißt die Ordnung der singulären Steuerung.

(ii) Für eine optimale Lösung $x(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$ gilt die verallgemeinerte Legendre-Clebsch-Bedingung

$$0 \leq (-1)^q B(t, x(t), \lambda(t))$$

$$= (-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} H_u(t)\right].$$

Für den schwierigen Beweis verweisen wir auf KNOBLOCH (1981).

Die Ordnung q hängt nicht von der Endzeit T und den

Randbedingungen ab. Im Beispiel (7.7) hat man

$$\sigma^{(0)} = \sigma = \lambda,$$

$$\sigma^{(1)} = \dot{\lambda} = -x,$$

$$\sigma^{(2)} = -\dot{x} = -u, \quad \bar{k} = 2, \; q = 1,$$

$$A(t, x, \lambda) = 0, \quad B(t, x, \lambda) = -1, \quad u = 0,$$

$$(-1)^q B = 1 > 0.$$

Bei speziellen Problemen ist es möglich, aus den Gleichungen

$$\sigma^{(k)}(t, x(t), \lambda(t)) = 0, \quad k = 0, .., 2q-1$$

eine Gleichung im Zustandsraum der Form

(7.11) $\quad S(t, x(t)) = 0$

mit $S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Im Falle $n=1$ kann man die Gleichung (7.11) auf einfache Weise mit Hilfe des GREEN'schen Integralsatzes berechnen; vgl. FEICHTINGER / HARTL (1986), § 3.3. Die optimale Lösung besteht dann in einer "raschest möglichen Annäherung" der singulären Trajektorie.

(7.12) Beispiel: Optimales Fischen

Mit den in § 1, Beispiel (3), gegebenen Bezeichnungen lautet das Modell

$$\max \int_0^T e^{-\delta t}(p - c(x(t)))\, u(t)\, dt$$

unter $\dot{x} = w(x) - u(t)$, $0 \le t \le T$,
$x(0) = x_0$,
$x(T)$ frei oder $x(T) = x_T$,
$0 \le u(t) \le u_{max}$.

Die Hamilton-Funktion ist hier

$$H = -e^{-\delta t}(p - c(x))\, u + \lambda (w(x) - u)$$

und die adjungierte DGL ergibt sich zu

$$\dot{\lambda} = -H_x = -e^{-\delta t} c'(x) u - \lambda w'(x).$$

Die Schaltfunktion lautet

$$\sigma(t, x, \lambda) = -e^{-\delta t}(p - c(x)) - \lambda.$$

Singuläre Steuerungen treten auf, wenn

$$\sigma(t) \equiv 0, \quad t_1 \le t \le t_2.$$

Durch Differentation erhält man unter Benutzung von $\sigma = 0$:

$$\dot{\sigma} = \delta e^{-\delta t}(p-c(x)) + e^{-\delta t}c'(x)(w(x)-u)$$
$$+ e^{-\delta t}c'(x)u + \lambda w'(x)$$
$$= \delta e^{-\delta t}(p-c(x)) + e^{-\delta t}c'(x)w(x)$$
$$+ \lambda w'(x)$$
$$\underset{(\sigma=0)}{=} e^{-\delta t}\left[\delta(p-c(x)) + c'(x)w(x) - (p-c(x)w'(x)\right]$$
$$\equiv 0 .$$

Also gilt

$$\boxed{p-c(x) = \frac{1}{\delta}\left[(p-c(x))\,w(x)\right]'}$$

Diese Gleichung besitze eine (eindeutige) <u>Gleichgewichtslösung</u> x_δ. Bzgl. einer marginalen Interpretation dieser Gleichung vergleiche man CLARK (1976), p. 42. Die singuläre Steuerung ergibt sich wegen $x(t) \equiv x_\delta$ aus

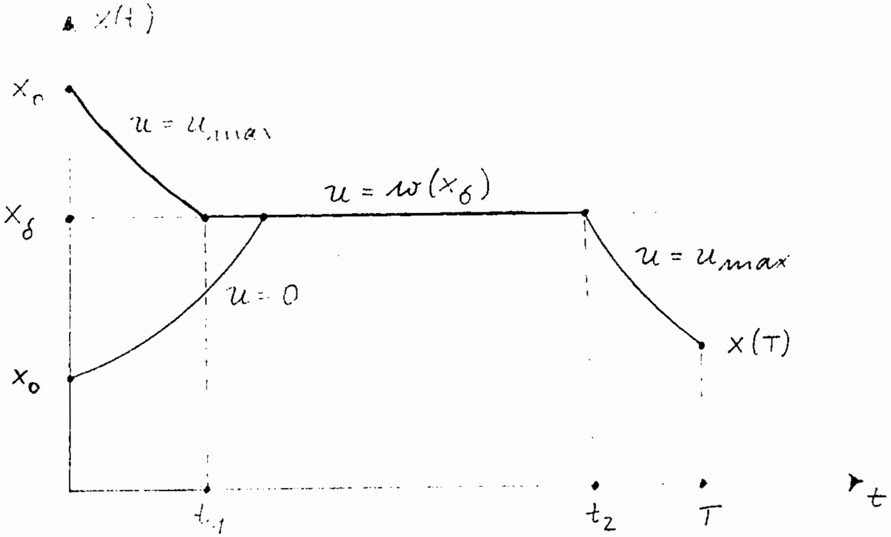
$$\dot{x} = w(x_\delta) - u = 0$$
$$\Rightarrow u(t) \equiv w(x_\delta).$$

Die optimale Lösung besteht nun darin, die Gleichgewichtslösung $x = x_\delta$, $u = w(x_\delta)$ möglichst schnell zu erreichen.

<u>Fester Endwert $x(T) = x_T$:</u>

Für $x_T < x_\delta$ und T genügend groß erhält man

* Die optimale Lösung hat die gleiche Struktur wie bei festem



Die Zeitpunkte t_1, t_2 sind aus $x(t_1) = x(t_2) = x_\delta$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsintegration der Dynamik zu berechnen.

Freier Endwert $x(T)$: *

Endwert. Die Transversalitätsbedingung ergibt

$$\lambda(T) = 0$$

und damit

$$\sigma(T) = -e^{-\delta T}(p - c(x(T))) < 0,$$

d. h.

$$u(t) = u_{max} \quad \text{für } t_2 \le t \le T.$$

Der Zeitpunkt t_2 kann mit $\sigma(t_2) = 0$ und einem geeigneten Randwertproblem für x, λ in $[t_2, T]$ bestimmt werden.

Zahlenwerte: Mit

$w(x) = r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $c(x) = \frac{c}{x}$ erhält man

* benutzt werden. Wir zeigen dies an einem Beispiel mit $q=1$, $n=3$.

$$x_\delta = \frac{K}{4}\left\{\left(\frac{c}{pK} + 1 - \frac{\delta}{\tau}\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{pK}+1-\frac{\delta}{\tau}\right)^2 + \frac{8c\delta}{pK\tau}}\right\},$$

$$x_\infty := \lim_{\delta\to\infty} x_\delta = \frac{c}{p}.$$

Für den Heilbutt im Nordpazifik ermittelte man die Daten

$K = 80.5 \cdot 10^6\,kg$, $\tau = 0.71$,

$x_\infty = 17.5 \cdot 10^6\,kg$,

$\delta = 0.2$, $x_\delta = 42.3 \cdot 10^6\,kg$.

Für $T = 10$ (Jahre) und

$x_0 = 0.8 \cdot K$, $x(T)$ frei,

$u_{max} = 0.5 \cdot K$ berechnet man $t_1 =$,
$t_2 =$.

Bei autonomen Problemen mit freier Endzeit gilt zusätzlich

$$H = a_0(x(t)) + \lambda(t)a(x(t)) + \sigma(t)u(t) \equiv 0.$$

Für eine singuläre Steuerung folgt dann wegen $\sigma(t) = 0$

$$a_0(x(t)) + \lambda(t)a(x(t)) = 0.$$

Zusammen mit

$$\sigma^{(k)}(x(t),\lambda(t)) = 0, \quad k = 0,..,2q-1$$

kann dies zur Berechnung einer singulären Mannigfaltigkeit

$$S(x(t)) = 0$$

(7.13) Beispiel: GODDARD-Problem

Das in §1, Beispiel (4), vorgestellte Problem der Höhenrakete lautete:

$$\max\ h(T)$$

unter

$$\dot h = v,$$

$$\dot v = \frac{1}{m}\left[u(t)c - D(v,h)\right] - g(h),$$

$$\dot m = -u(t),$$

$$h(0)=0,\quad v(0)=0,\quad m(0)=m_0,$$

$$m(T)=m_T,$$

$$0 \le u(t) \le u_{max}$$

T frei.

Mit $\lambda = (\lambda_h, \lambda_v, \lambda_m)$, $x = (h, v, m)^T$ ist die Hamilton-Funktion

$$H = \lambda_h v + \lambda_v\left[\frac{1}{m}(uc - D) - g\right] - \lambda_m u$$

$$= \lambda_h v - \lambda_v\left[\frac{D}{m} + g\right]$$

$$+ \left(\lambda_v \frac{c}{m} - \lambda_m\right) u .$$

Die adjungierten DGL lauten

$$\dot\lambda_h = \lambda_v\left(\frac{1}{m} D_h + g_h\right)$$

$$\dot\lambda_v = -\lambda_h + \lambda_v \frac{1}{m} D_v$$

$$\dot\lambda_m = \lambda_v \frac{1}{m^2}(u\cdot c - D).$$

Es ist mit den Bezeichnungen von (6.1)

$$g(x(T)) = -h(T),\quad \psi(x(T)) = m(T) - m_T$$

und daher hat man die Transversalitätsbedingungen *

* $\lambda_h(T) = -1$, $\lambda_v(T) = 0$, $\lambda_m(T)$ frei.

Die Schaltfunktion und deren erste zeitliche Ableitung sind

$$\sigma = \lambda_v \frac{c}{m} - \lambda_m ,$$

$$\dot{\sigma} = \lambda_v \frac{1}{m^2}(D + c D_v) - \lambda_h \frac{c}{m} .$$

Die singuläre Steuerung u_s in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ wird aus

$$\sigma^{(2)} = \ddot{\sigma} = 0 , \quad q = 1 ,$$

gemäß (7.9) berechnet zu

$$u_s = \frac{D}{c} + m\Big(D_h(c - v) + D_v g + c D_{vv} g$$

$$- c D_{vh} v + c m g_h\Big) \Big/ (D + 2c D_v + c^2 D_{vv}).$$

Die Bestimmung von u_s kann auch auf andere Weise erfolgen:

das Problem ist autonom und die Endzeit T ist frei, also

$$H(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \in [0, T] ,$$

$$\sigma(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2] .$$

Daraus folgt

$$\lambda_h v - \lambda_v \left(\frac{D}{m} + g\right) = 0 \quad \text{in } [t_1, t_2].$$

Zusammen mit $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ stellen diese drei Gleichungen ein LGS für die nicht verschwindende Variable λ dar. Die Determinante der Koeffizienten von λ muß daher verschwinden:

$$S(x) = D + mg - \frac{v}{c} D - v D_v = 0 .$$

Dies ist eine zweidimensionale

* Schreib $u_s(t)$ nur im hinteren

singuläre Fläche in $\mathbb{R}^3$. Aus

$$\frac{d\,S(x(t))}{dt} = 0$$

gewinnt man den obigen Ausdruck u_s für die singuläre Steuerung zurück. Weiterhin gilt

$$0 = H(T) = -v(T) + \sigma(T)\,u(T).$$

Hieraus folgert man sofort die physikalisch plausible Bedingung

$$v(T) = 0.$$

Nun ist wegen $v(0) = v(T) = 0$

$$S(x(0)) = m_0 g_0 > 0,$$
$$S(x(T)) = m_T\, g(h(T)) > 0.$$

Daher kann ein singulärer *

auftreten, d.h. $0 < t_1 < t_2 < T$. Man kann zeigen, daß die optimale Steuerung die Struktur hat

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & 0 \le t \le t_1 \\ u_s(t), & t_1 \le t \le t_2 \\ 0, & t_2 \le t \le T. \end{cases}$$

Die Zeitpunkte t_1, t_2 und die Endzeit T bestimmt man durch Integration der Zustands-DGL numerisch folgendermaßen:

(a) <u>Zeitpunkt t_1:</u> Integriere mit $u(t) = u_{max}$ bis

$$S(x(t_1)) = 0$$

erfüllt ist.

(b) Zeitpunkt t_2: Integriere mit singulärem Schub $u_s(t)$ bis $m(t_2) = m_T$ gilt,

(c) Endzeit T: Integriere mit $u(t) = 0$ bis $v(T) = 0$ erreicht ist.

Zahlenwerte: $D(v, h) = \alpha\, v^2 \exp(-\beta h)$,

$$u_{max} = 9.52551, \quad c = 2060.,$$

$$\alpha = 0.01227, \quad \beta = 0.145 \cdot 10^{-3}$$

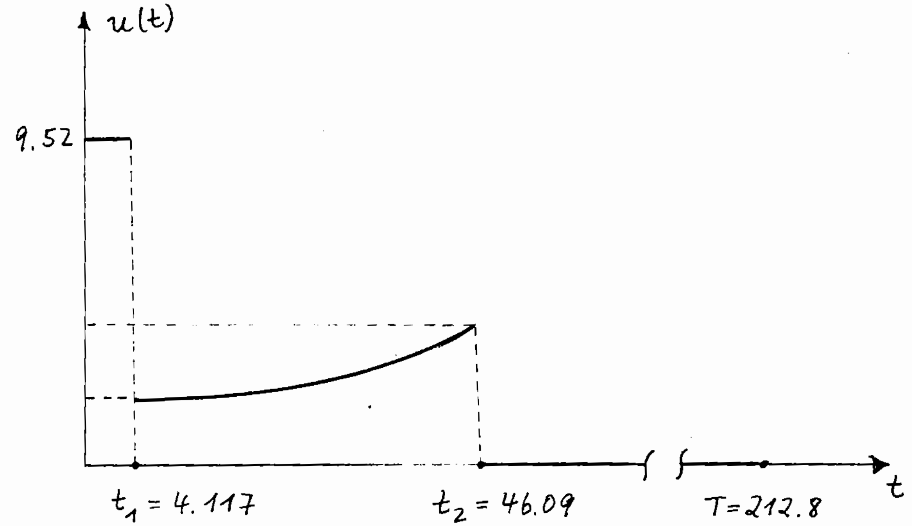
$$g_0 = 9.81, \quad r_0 = 6.371 \cdot 10^6,$$

$$g(h) = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2} .$$

Man erhält

$$t_1 = 4.11770, \quad t_2 = 46.0942$$

$$T = 212.866, \quad h(T) = 161.345$$



* Struktur gibt es z. B. die beiden folgenden numerischen Methoden:
(1) Finite <u>Optimierungsmethoden</u>, bei denen die Lage und die Anzahl

<u>Bemerkungen zu numerischen Methoden für bang-bang und singuläre Steuerungen</u>

Eine numerische Hauptschwierigkeit besteht darin, die <u>Struktur</u> der optimalen Lösung, d. h. die Anzahl und die Reihenfolge der bang-bang und singulären Teilstücke zu bestimmen. Bei einigen Beispielen kann die Struktur der Lösung entweder apriori (vgl. Beispiele (7.12), (7.13)) oder durch Homotopie-Verfahren ermittelt werden. Bei bekannter

[illegible] *

der Schaltpunkte als freie Optimierungsvariable auftreten;

(2) Geeignete <u>Randwertprobleme</u> mit unstetigen rechten Seiten der DGL, welche durch Schaltfunktionen gesteuert werden.

§ 8 Probleme mit regulärer Hamilton-Funktion und nichtlinear auftretender Steuerung

Ausgangspunkt ist der Steuerprozeß (6.1). Alle auftretenden Funktionen seien aus der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Für eine optimale Lösung $x(t)$, $u(t)$ sei das Maximumprinzip (6.3) mit $\lambda_0 = 1$ und der adjungierten Variablen $\lambda(t)$ erfüllt. Die Hamilton-Funktion ist demnach

$$H(t,x,\lambda,u) = f_0(t,x,u) + \lambda f(t,x,u).$$

(8.1) <u>Definition</u>: Die Hamilton-Funktion H heißt <u>regulär</u> (bzgl. einer optimalen Lösung $x(t)$), wenn es $\varepsilon > 0$ gibt, sodaß für die Menge

$$D_\varepsilon := \{(t,x,\lambda) \mid t \in [0,T],\ \|x - x(t)\| < \varepsilon,\ \|\lambda - \lambda(t)\| < \varepsilon\}$$

gilt: die Funktion $H(t,x,\lambda,\cdot)$ hat eine eindeutig bestimmte Minimalstelle

$$u^*(t,x,\lambda) = \arg\min_{u \in U} H(t,x,\lambda,u)$$

für alle $(t,x,\lambda) \in D_\varepsilon$.

Im Falle einer regulären Hamilton-Funktion ist dann die optimale Steuerung der eindeutig bestimmte Wert

$$(8.2) \quad u(t) = u^*(t, x(t), \lambda(t)).$$

Bei den in §7 betrachteten Problemen mit <u>linear</u> auftretender Steuerung ist H i.a. nicht regulär; z.B. ist für $n=1$ gemäß (7.4) die optimale Steuerung $u(t)$ an den Stellen $t \in [0,T]$ mit $\sigma(t) = 0$ nicht eindeutig bestimmt und ist dort <u>unstetig</u>.

Im Gegensatz hierzu wollen wir nun zeigen, daß im Falle einer regulären Hamilton-Funktion die optimale Steuerung stetig ist und sogar eine C^k-Funktion ist für $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$.

(8.3) Beispiel:

$$\min \int_0^T \left(\frac{u^2}{2} - x\right) dt$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0 \quad .$$

Die Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{u^2}{2} - x + \lambda u \quad .$$

Wegen $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ folgt aus der Minimum-Bedingung

$$H_u = u + \lambda = 0, \quad H_{uu} = 1 > 0 .$$

Also ist

$$u^*(u, \lambda) = -\lambda$$

die eindeutig bestimmte Minimalstelle von H; u^* ist eine C^∞-Funktion. Die adjungierte DGL

$$\dot{\lambda} = -H_x = 1, \quad \lambda(T) = 0$$

hat die Lösung $\lambda(t) = t - T$. Insgesamt erhalten wir das Randwertproblem für x, λ

$$\dot{x} = u = -\lambda, \qquad x(0) = x_0,$$
$$\dot{\lambda} = 1, \qquad \lambda(T) = 0,$$

mit der Lösung

$$\lambda(t) = t - T, \quad u(t) = T - t,$$
$$x(t) = x_0 + T \cdot t - \frac{t^2}{2} .$$

Offenbar sind die hinreichenden Optimalitätsbedingungen (6.8) erfüllt.

Wir führen nun im obigen Problem die zusätzliche Steuerbeschränkung

$$u(t) \in \mathcal{U} = [0,1]$$

ein. Hier ist

$$u^*(x,\lambda) = \arg\min_{u\in[0,1]} H(x,\lambda,u)$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le \lambda \\ -\lambda & ; \quad -1 < \lambda < 0 \\ 1 & ; \quad \lambda \le -1 \end{cases}.$$

Die optimale Lösung lautet für $T > 1$:

$$(x(t),u(t)) = \begin{cases} (x_0 + t,\ 1), & 0 \le t \le T-1, \\ \left(x_0 - \frac{(T-1)^2}{2} + Tt - \frac{t^2}{2},\ T-t\right), & T-1 \le t \le T. \end{cases}$$

$u(t)$ ist stetig, aber in $t = T-1$ beim Verlassen der Begrenzung $u=1$ nicht differenzierbar.

Zur genaueren Untersuchung der Differenzierbarkeitseigenschaften der optimalen Steuerung $u(t)$ betrachten wir nun zwei Fälle:

1. Fall: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$
2. Fall: $\mathcal{U} \subsetneqq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ kompakt.

<u>1. Fall:</u> $\underline{\mathcal{U} = \mathbb{R}^m}$

Entlang einer Lösung $x(t), \lambda(t), u(t)$ muß gelten

(8.4) $\quad H_u(t) = 0,$

$\quad H_{uu}(t) \ge 0$ positiv semidefinit,

Legendre-Clebsch-Bedingung.

(8.5) <u>Definition</u>

Die Hamilton-Funktion H heißt <u>C^k-regulär</u>, wenn H regulär ist und die Funktion

$$u^*(t,x,\lambda) = \arg\min_{u\in\mathbb{R}^m} H(t,x,\lambda,u)$$

eine C^k-Funktion ist auf der Menge D_ε (vgl. Def. (8.1)).

Setzt man die strenge Legendre-Clebsch-Bedingung

$$H_{uu}(t) > 0$$

voraus, so kann $u = u^*(t,x,\lambda)$ berechnet werden aus

$$H_u(t,x,\lambda,u) = 0$$
$$H_{uu}(t,x,\lambda,u) > 0 \,.$$

Die C^k-Regularität hat dann die numerische Konsequenz, daß die Variable u in den DGL eliminiert werden kann gemäß

$$\dot{x} = f(t,x,u^*(t,x,\lambda)) =: h_1(t,x,\lambda) \,,$$
$$\dot{\lambda} = -H_x(t,x,\lambda,u^*(t,x,\lambda)) =: h_2(t,x,\lambda)^T .$$

Die Funktion

$$h(t,x,\lambda) := \begin{pmatrix} h_1(t,x,\lambda) \\ h_2(t,x,\lambda) \end{pmatrix}$$

ist eine C^k-Funktion. Falls zusätzlich

$$x_i(T) = c_i \,, \quad i = 1,..,r,$$

so erhalten wir mit (6.5) das folgende <u>Randwert-Problem (RWP)</u>

$$(8.6) \quad \boxed{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x \\ \lambda^T \end{pmatrix}^{\bullet} = h(t,x,\lambda), \\ &x(0) = x_0 \,, \quad x_i(T) = c_i \,, \quad i = 1,..,r, \\ &\lambda_i(T) = g_{x_i}(x(T)), \quad i = r+1,..,n. \end{aligned}}$$

Wenn die Endzeit T <u>frei</u> ist, so gilt außerdem

T <u>Parameter</u>, d.h. $\dot{T} = 0$,

$H(T) = 0$.

Zur numerischen Lösung von RWP vergleiche man Stoer, Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathematik II, § 7.3. Das Re-entry-Problem in § 7.3.7 stellt ein numerisch anspruchsvolles Anwendungsbeispiel für eine reguläre Hamilton-Funktion dar.

Die Lösung x, λ von (8.6) sind C^k-Funktionen, also erhalten wir

(8.7) Folgerung:

Ist eine Hamilton-Funktion H C^k-regulär, dann hat das RWP eine C^k-Lösung $x(t), \lambda(t)$ und die optimale Steuerung $u(t) = u^*(t, x(t), \lambda(t))$ ist eine C^k-Funktion.

(8.8) Beispiel:

$$\min J(x,u) = \int_0^1 (x^2 + u^2)\, dt$$

$$\dot{x} = x^2 - u$$
$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1 .$$

Die Minimierung der Hamilton-Funktion

$$H(x, \lambda, u) = x^2 + u^2 + \lambda(x^2 - u)$$

ergibt $H_u = 2u - \lambda = 0$, also

$$u^*(x, \lambda) = \lambda/2 .$$

Damit ist das folgende RWP zu lösen:

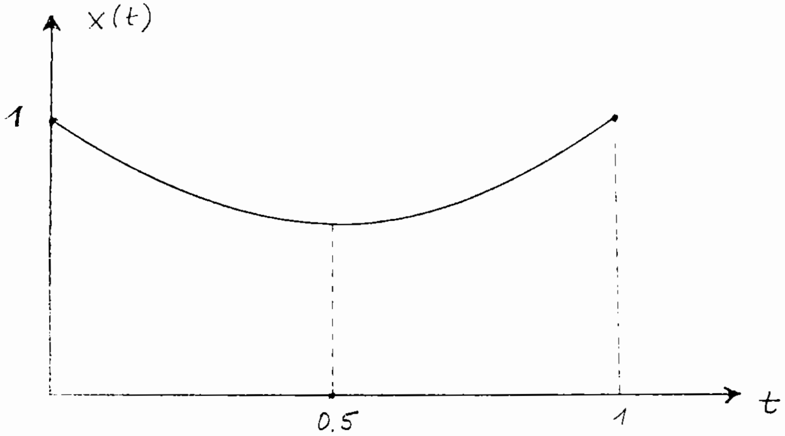
$$\dot{x} = x^2 - \lambda/2 ,$$
$$\dot{\lambda} = -H_x = -2x(1+\lambda),$$
$$x(0) = x(1) = 1.$$

Mit einem Einfach-Schießverfahren

erhält man

$$\lambda(0) = 4.06096 ,$$
$$J(x,u) = 1.53726 .$$

$$\min_{t\in[0,1]} x(t) = x(0.5) = 0.768116 .$$



Mit den obigen Überlegungen können <u>linear-quadratische</u> Modelle geschlossen behandelt werden. Als <u>Regulator-Problem</u> bezeichnet man das Problem

$$(8.9) \qquad \min \frac{1}{2}(x(T)-x_T)^T S_T (x(T)-x_T) + \frac{1}{2}\int_0^T \Big\{ (x(t)-\tilde{x}(t))^T C(t)(x(t)-\tilde{x}(t)) + (u(t)-\tilde{u}(t))^T D(t)(u(t)-\tilde{u}(t)) \Big\} dt$$

unter

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + z(t)$$
$$x(0) = x_0$$
$$x(T) \text{ frei}, \quad T>0 \text{ fest}.$$

Dabei seien die Funktionen $\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)$, $z(t)$ und alle auftretenden Matrizen stetig; $C(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $S_T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit, $D(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Die optimale Lösung $x(t)$, $u(t)$ soll also

*

* $\lambda(T)^T = S_T\,(x(T)-x_T)$

Die DGL für x und λ sind linear in x und λ.

Damit kann man

ten Trajektorie $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ liegen.

Die zugehörige Hamilton-Funktion ist

$$H(t,x,\lambda,u) = \frac{1}{2}(x-\tilde{x}(t))^T C(t)(x-\tilde{x}(t))$$
$$+\frac{1}{2}(u-\tilde{u}(t))^T D(t)(u-\tilde{u}(t))$$
$$+\lambda\,(A(t)x+B(t)u+z(t)).$$

Aus

$$H_u = (u-\tilde{u})^T D + \lambda B = 0$$

berechnet man

(8.10) $$u^*(t,x,\lambda) = \tilde{u}(t) - D(t)^{-1}B(t)^T\lambda^T.$$

Die adjungierten DGL lauten

(8.11) $$\dot{\lambda}^T = -C\,(x-\tilde{x}) - A^T\lambda^T,$$

~~$\lambda(T)^T = S_T(x(T)-x_T)$~~ *

zeigen, daß λ in linearer Weise von x abhängt. Dies motiviert den Ansatz

(8.12) $$\lambda(t)^T = S(t)\,x(t) - \gamma(t)$$

mit einer stetig differenzierbaren $(n\times n)$-Matrix $S(t)$ und einer C^1-Funktion γ. Die DGL für x lautet mit (8.10), (8.12)

$$\dot{x} = Ax + B(\tilde{u} - D^{-1}B^T\lambda^T) + z$$
$$= Ax + B\tilde{u} - BD^{-1}B(Sx-\gamma) + z.$$

Die Differentation des Ansatzes (8.12) für λ ergibt mit (8.11)

$$\dot{S}x + S\dot{x} - \dot{\gamma} = -C(x-\tilde{x}) - A^T(Sx-\gamma).$$

* Setzt man den Ausdruck für $\dot{x}$

Setzt man den Ausdruck für $\dot{x}$ ein, so erhält man nach Umordnung

$$(\dot{S} - SBD^{-1}B^TS + SA + A^TS + C)x$$
$$= -SB\tilde{u} + C\tilde{x} - Sz + \dot{\gamma} - SBD^{-1}B^T\gamma + A^T\gamma.$$

Dies soll für alle x gelten, also erhält man die DGL

$$(8.13)\quad \boxed{\begin{aligned} \dot{S} &= SBD^{-1}B^TS - SA - A^TS - C \\ \dot{\gamma} &= (SBD^{-1}B^T - A^T)\gamma + SB\tilde{u} + Sz - C\tilde{x} \end{aligned}}$$

Die DGL für S ist eine Matrix-RICCATI-DGL, während sich für γ eine lineare DGL ergibt. Mit (8.11), (8.12) gewinnt man die Endbedingungen

$$S(T) = S_T, \quad \gamma(T) = S_T x_T.$$

(8.14) Beispiel: Lagerhaltung:

Es bezeichne; vgl. Beispiel 1.6:

x: Lagerbestand,
u: Bestell-(Produktions-)rate,
d: Nachfrage,
h, c: positive Konstanten.

Das Problem lautet dann

$$\min \frac{1}{2}\left\{c(x(T)-x_T)^2 + \int_0^T [h(x-\tilde{x})^2 + (u-\tilde{u})^2]\,dt\right\}$$

$$\dot{x} = u(t) - d(t), \quad x(0) = x_0.$$

Mit $A=0$, $B=1$, $C=h$, $D=1$, $z=-d$, $S_T=c$ erhält man aus (8.13)

$$\dot{S} = S^2 - h, \quad S(T) = c$$
$$\dot{\gamma} = \gamma S + S(\tilde{u} - d) - h\tilde{x}, \quad \gamma(T) = x_T c.$$

Die Lösung der RICCATI-DGL für S ist

$$S(t) = \sqrt{h}\,\tanh(k - \sqrt{h}\,t),$$
$$k := \sqrt{h}\,T + \operatorname{artanh}(c/\sqrt{h}).$$

gemäß (8.10) ist dann die optimale feedback-Steuerung

$$u(t) = \tilde{u}(t) - x(t)\sqrt{c}\,\tanh(k - \sqrt{h}\,t) + \gamma(t),$$

wobei $\gamma(t)$ als Lösung der linearen DGL zu berechnen ist.

1. Spezialfall:

$\tilde{u}(t) = d(t)$, $\tilde{x} = \text{const}$, $c = 0$:

$$\gamma(t) = \sqrt{h}\,\tilde{x}\,\tanh(\sqrt{h}(T-t)),$$
$$x(t) = \tilde{x} + (x_0 - \tilde{x})\cosh(\sqrt{h}(T-t)) / \cosh(\sqrt{h}\,T).$$

2. Spezialfall:

$\tilde{x}(t) = \tilde{x} = \text{const}$, $\tilde{u}(t) = \tilde{u} = \text{const}$,

$d(t) = a + b\sin(\sqrt{h}(T-t))$, $a, b \in \mathbb{R}$,

zyklische Nachfragefunktion,

$c = 0$:

Die Lösung lautet explizit:

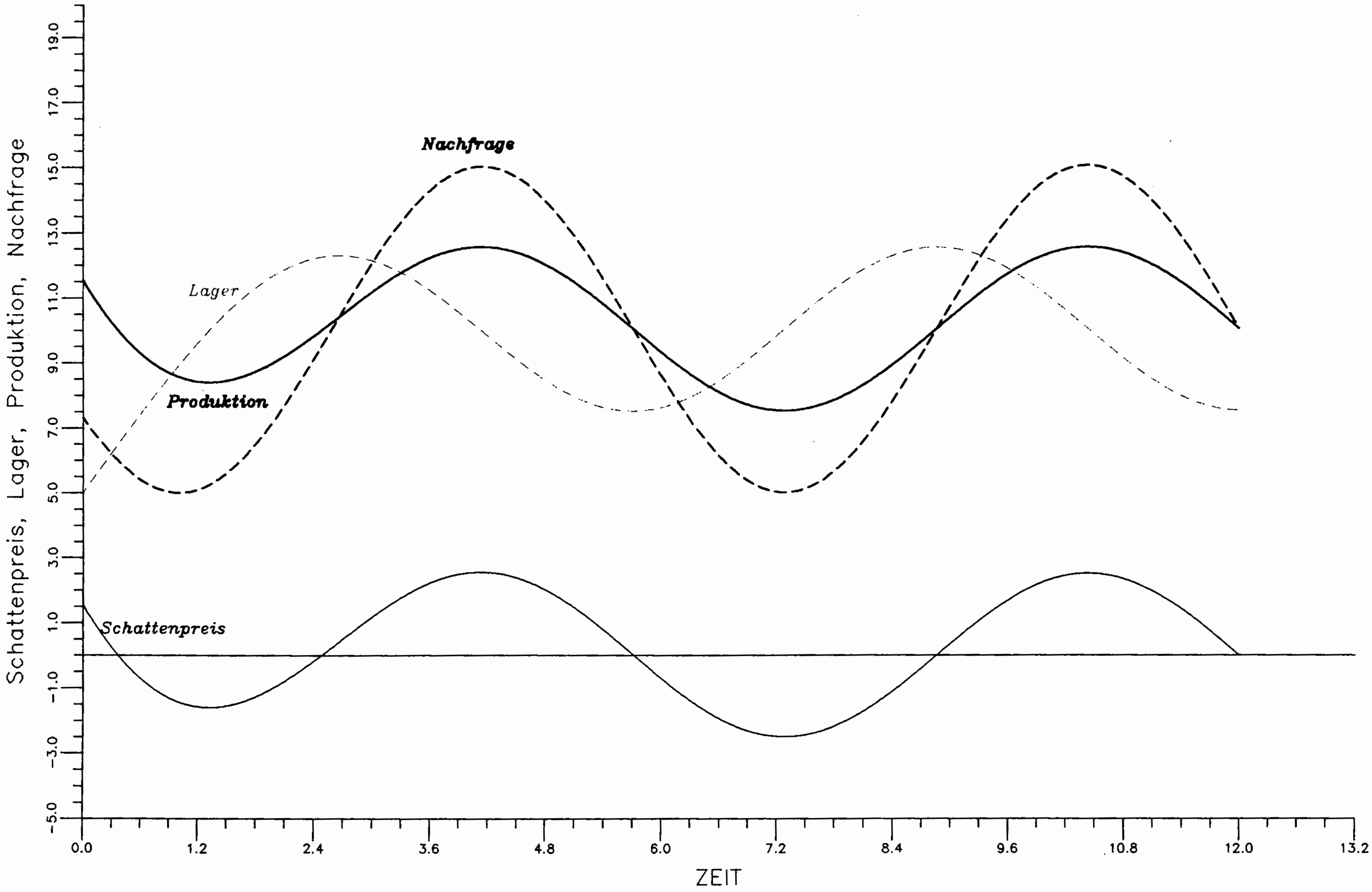
$$S(t) = \sqrt{h}\,\tanh(\sqrt{h}(T-t)),$$

$$x(t) = (x_0 - \tilde{x})\frac{\cosh(\sqrt{h}(T-t))}{\cosh(\sqrt{h}\,T)} + \tilde{x}$$
$$- \frac{b}{2\sqrt{h}}\cos(\sqrt{h}(T-t))$$
$$+ \frac{b\cosh(\sqrt{h}(T-t))\cos(\sqrt{h}\,T)}{2\sqrt{h}\cosh(\sqrt{h}\,T)}$$
$$- \frac{\cosh(\sqrt{h}(T-t))(\tilde{u}-a)}{\sqrt{h}}\left\{\tanh(\sqrt{h}(T-t)) - \tanh(\sqrt{h}\,T)\right\}.$$

Mit den Werten $\tilde{u} = \tilde{x} = a = 10.0$, $b = x_0 = 5.0$, $h = 1$ $T = 12.0$ berechnet man folgende Kurve:

8.19

Graph des unbeschränkten LQ–Problems



2. Fall: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ kompakt

o.E. sei $m = 1$, $\mathcal{U} = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Die optimale Steuerung $u^*(t)$ setzt sich zusammen aus inneren Teilstücken $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ mit

$$a < u^*(t) < b, \quad t_1 \le t \le t_2,$$

und Randstücken $[t_1, t_2]$ mit

$$u^*(t) = a \quad \text{bzw.} \quad u^*(t) = b, \quad t_1 \le t \le t_2,$$

vgl. Beispiel (8.3). Ein Zeitpunkt $t_1 \in (0,T)$ heißt Eintrittspunkt eines Randstückes $[t_1, t_2]$, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$u^*(t) > a \quad \text{bzw.} \quad u^*(t) < b, \quad t_1 - \varepsilon \le t < t_1.$$

Entsprechend wird ein Austrittspunkt $t_2 \in (0,T)$ definiert.

Für diesen Abschnitt machen wir die

generelle Voraussetzung: Die Hamilton-Funktion H ist C^k-regulär $(k \ge 2)$.

Auf inneren Teilstücken kann man dann die C^k-Funktion $u^*(t,x,\lambda)$ aus den Bedingungen

$$H_u(t) = 0, \quad H_{uu}(t) \ge 0$$

berechnen. Auf Randstücken muß wegen

$$u^*(t) = \arg\min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x(t), \lambda(t), u)$$

gelten

$$H_u(t) \ge 0, \quad \text{falls } u^*(t) = a$$
$$H_u(t) \le 0, \quad \text{falls } u^*(t) = b.$$

(8.15) Lemma: Die optimale Steuerung $u^*(t)$ ist stetig in einem Eintritts- bzw. Austrittspunkt

Der Beweis folgt auf einfache Weise aus der Regularität von H; als Illustration vgl. man mit Beispiel (8.3).

(8.16) Beispiel: Optimale Temperaturverteilung bei einem chemischen Prozeß.

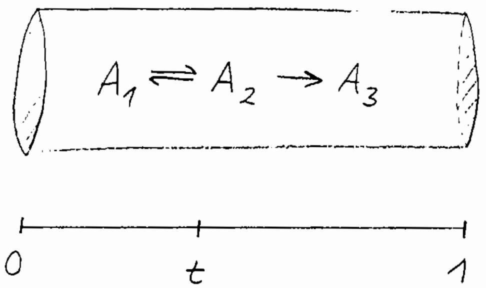
A_i : chem. Substanz, $i=1,2,3$

A_3 : Abfallprodukt

Der Prozeß

$$A_1 \rightleftharpoons A_2 \rightarrow A_3$$

findet in einem kreisförmigen Zylinder statt:



$x_i(t)$: Konzentration von A_i, $i=1,2$,

$T(t)$: Temperaturverteilung, $0 \le t \le 1$,

$$u(t) := \exp\left(-\frac{\alpha}{T(t)}\right), \quad \alpha > 0,$$

$$u(t) \in [u_{min}, u_{max}] \Longleftrightarrow T(t) \in [T_{min}, T_{max}]$$

$$u_{min} > 0, \quad T_{min} > 0.$$

Reaktionsgleichungen:

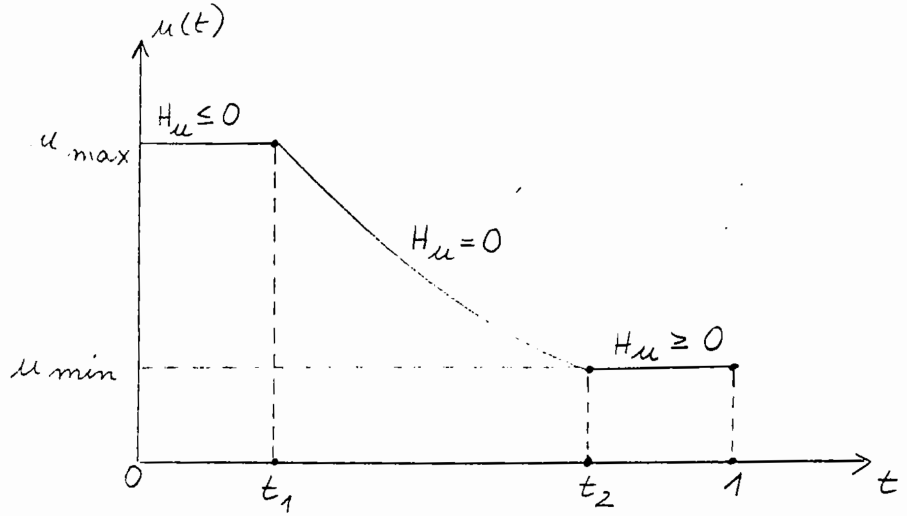
$$\dot{x}_1 = -x_1 u(t) + x_2 u(t)^2, \quad x_1(0) = 1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 u(t) - 3 x_2 u(t)^2, \quad x_2(0) = 0,$$

$$u_{min} \le u(t) \le u_{max}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Problem: Maximiere $g(x(1)) := x_2(1)$.

Optimale Temperaturprofile



Für kleine Werte u_{min} tritt kein Randstück $[t_2, 1]$ auf.

Die numerische Berechnung der in diesem Abschnitt betrachteten optimalen Steuerungen führt auf

geeignete RWP der Form (8.6). Die Eintritts- bzw Austrittspunkte t_1, t_2 sind dabei Nullstellen von "Schaltfunktionen".

§ 10 Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen

Wir betrachten ein autonomes Steuerproblem der Form (6.1)

$$\min \quad g(x(T)) + \int_0^T f_0(x,u)\,dt$$

(10.1) $\qquad \dot{x} = f(x,u), \quad 0 \le t \le T,$

$\qquad x(0) = x_0, \quad \psi(x(T)) = 0,$

$\qquad u(t) \in \mathcal{U}$

wobei zusätzlich die Zustandsbeschränkung (ZB)

(10.2) $\qquad S(x) \le 0$

erfüllt sei. Die Funktion $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und alle auftretenden Funktionen seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Die ZB (10.2) bedeutet explizit $\quad S(x(t)) \le 0$ für $0 \le t \le T$

Ein Zeitintervall $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ heißt inneres Teilstück, wenn

$$S(x(t)) < 0 \quad \text{für } t_1 \le t \le t_2.$$

Auf inneren Teilstücken ist also die ZB nicht aktiv und für eine optimale Lösung gelten daher die notwendigen Bedingungen von Satz (6.3).

Die Menge

$$I_0 := \{ t \in [0,T] \mid S(x(t)) = 0 \}$$

heißt Menge der aktiven Zeitpunkte; I_0 ist abgeschlossen. Zur Untersuchung der Struktur dieser Menge benötigen wir die folgenden Definitionen.

(1) Ein Intervall $[t_1, t_2] \subset [0,T]$, $t_1 < t_2$, mit

$$S(x(t)) = 0 \quad \text{für } t_1 \le t \le t_2$$

heißt Randstück. Der Zeitpunkt t_1

heißt <u>Eintrittspunkt</u>, wenn

$$S(x(t_1-\varepsilon))<0 \quad \text{für } \varepsilon>0 \text{ hinreichend klein.}$$

Der Zeitpunkt t_2 heißt <u>Austrittspunkt</u>, wenn

$$S(x(t_2+\varepsilon))<0 \quad \text{für } \varepsilon>0 \text{ hinreichend klein.}$$

Ein Eintrittspunkt bzw. Austrittspunkt heißt <u>Verbindungspunkt</u> zwischen einem inneren Teilstück und einem Randstück.

(2) Ein Zeitpunkt $t_1 \in [0,T]$ heißt <u>Kontaktpunkt</u>, wenn

$$S(x(t_1))=0$$

$$S(x(t_1\pm\varepsilon))<0 \quad \text{für } \varepsilon>0 \text{ hinreichend klein.}$$

Im Falle $t_1=0$ bzw. $t_1=T$ gelten die Ungleichungen einseitig

Die zu einem Randstück $[t_1,t_2]$ gehörende Steuerung $u(t)$ heißt <u>Randsteuerung</u>. Zur Berechnung einer Randsteuerung beschränken wir uns auf den skalaren Fall $m=1$. Rekursiv werden die Funktionen definiert:

$$S^0 := S,$$

$$S^{i+1} := S^i_x f, \quad i=0,1,\ldots$$

Die ZB $S(x)\le 0$ hat die Ordnung <u>$p\in\mathbb{N}_+$</u>, wenn gilt

$$(S^i)_u = 0, \quad i=0,1,\ldots,p-1,$$

$$(S^p)_u \neq 0.$$

Nach Konstruktion gilt dann entlang einer Trajektorie $x(t)$, $u(t)$ mit

$\dot{x} = f(x,u)$:

(10.3)
$$\boxed{\begin{aligned} S^i(x(t)) &= \frac{d^i}{dt^i} S(x(t)), \quad i=0,..,p-1, \\ S^p(x(t),u(t)) &= \frac{d^p}{dt^p} S(x(t)). \end{aligned}}$$

Auf einem Randstück $[t_1, t_2]$ gelten daher die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} S^i(x(t)) &= 0, \quad i=0,..,p-1, \\ S^p(x(t),u(t)) &= 0, \end{aligned}\right\} t_1 \le t \le t_2 .$$

Wegen des Eindeutigkeitssatzes für DGL ist dies äquivalent mit

(10.4)
$$\boxed{\begin{aligned} S^i(x(t_1)) &= 0, \quad i=0,..,p-1, \\ S^p(x(t),u(t)) &= 0, \quad t_1 \le t \le t_2 \end{aligned}}$$

Im folgenden benötigen wir

(10.5) Voraussetzung:

(a) Die Gleichung $S^p(x,u)=0$ ist eindeutig auflösbar nach $u = u(x)$ mit einer C^{p+1}-Funktion $u(x)$.

(b) Auf jedem Randstück gilt für die Randsteuerung $u(t)$:

$$(S^p)_u(x(t),u(t)) \neq 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Aufgrund von Teil (b) folgt die Beziehung

$$u(t) = u(x(t)).$$

Daher genügt $x(t)$ auf $[t_1,t_2]$ der DGL

$$\dot{x} = f(x, u(x)).$$

Mit $u(x)$ ist dann auch $x(t)$ eine C^{p+1}-Funktion; damit ist die Randsteuerung $u(t) = u(x(t))$ eine C^{p+1}-Funktion.

(10.6) Beispiel:

Seien r, k Indices mit $0 \leq r < k$.
Die Dynamik sei

$$y^{(k)} = u.$$

Die r-te Ableitung $y^{(r)}$ unterliege der Beschränkung

$$y^{(r)} \leq \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Setzt man

$$x_i := y^{(i-1)} \quad , \quad i = 1, .., k \quad , \quad x = (x_1, .., x_k)^T,$$

$$S(x) := x_{r+1} - \alpha \quad ,$$

so ergibt sich

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad , \quad i = 1, .., k+1,$$

$$\dot{x}_k = u \quad ,$$

$$S(x) = x_{r+1} - \alpha \leq 0.$$

Also folgt mit $p := k - r$

$$S^i = \frac{d^i}{dt^i} S = x_{r+1+i} \quad , \quad i = 1, .., p-1,$$

$$S^p = u \quad , \quad (S^p)_u = 1.$$

Die Vor. (10.5) ist dann erfüllt mit $u(x) = 0$. Betrachtet man als Anwendung das Spline-Problem in Beispiel (6), § 1

$$\min \int_0^T u(t)^2 dt \quad , \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = u$$

mit der ZB $x_1 \leq \alpha$, so hat man die

Ordnung $p=2$.

Zur Formulierung notwendiger Optimalitätsbedingungen für das Problem (10.1), (10.2) bilden wir die erweiterte Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(x,\lambda,\mu,u) := \lambda_0 f_0(x,u) + \lambda f(x,u) + \mu S(x)$$
$$= H(x,\lambda,u) + \mu S(x),$$
$$\lambda_0 \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

In Erweiterung des Minimum-Prinzips (6.3) gilt

(10.7) Minimum-Prinzip:

Sei $x(t)$, $u(t)$ eine optimale Lösung von (10.1), (10.2). Die Vor. (10.5) sei erfüllt und für jedes Randstück $[t_1,t_2]$ gelte $u(t) \in \operatorname{int} U$ für $t_1<t<t_2$

Dann gibt es

(a) eine Konstante $\lambda_0 \geq 0$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$,

(b) eine stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare adjungierte Funktion $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$,

(c) eine stückweise stetige Multiplikator-Funktion $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$,

(d) Multiplikatoren $\nu(t_i) \in \mathbb{R}$ in jedem Verbindungspunkt oder Kontaktpunkt t_i,

sodaß die folgenden Aussagen gelten:

(1) $u(t) = \arg\min_{u \in U} \tilde{H}(x(t),\lambda(t),\mu(t),u)$

für alle Stetigkeitsstellen $t \in [0,T]$ von $u(t)$;

(2) $\dot{\lambda} = -\tilde{H}_x(t) = -\lambda_0 f_x^0(t) - \lambda f_x(t) - \mu S_x(t)$,

$\lambda(T) = \lambda_0 g_x(x(T)) + \sigma \psi_x(x(T))$;

(3) $\mu(t) \geq 0$ und $\mu(t)\, S(x(t)) = 0$ für alle $t \in [0,T]$;

* Sei $x(t)$, $u(t)$ ein zulässiges Paar für das Steuerproblem (10.1), (10.2),

(4) in jedem Verbindungs- oder Kontaktpunkt t_i gilt die Sprungbedingung

$$\lambda(t_i+) = \lambda(t_i-) - \nu(t_i) S_x(x(t_i)),$$
$$\nu(t_i) \geq 0 \;;$$

(5) für eine freie Endzeit T gilt

$$H(T) = 0 .$$

Zum Beweis vergleiche man JACOBSON/LELE/SPEYER (1971), MAURER (1976), HARTL (1986).

Mit zusätzlichen Konvexitätsannahmen gewinnt man aus (10.7)

(10.8) <u>Hinreichende Optimalitätsbedingungen</u> *

* Zum Beweis vgl. FEICHTINGER/HARTL, S. 180, Satz 7.1

sodaß die Vor. (10.5) erfüllt ist. Es gebe Funktionen $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ und Multiplikatoren $\nu(t_i)$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, sodaß die notwendigen Bedingungen von Satz (10.7) mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt sind. Ferner sei

(a) $g(x)$ konvex,

(b) $\psi(x)$ affin-linear,

(c) $S(x)$ konvex,

(d) $H^0(x,\lambda) := \min\limits_{u \in \mathcal{U}} H(x,\lambda,u)$

konvex in x für jedes $\lambda(t)$, $t \in [0,T]$.

Dann ist (x,u) eine optimale Lösung.

~~Zum Beweis vgl. FEICHTINGER/~~

zur numerischen Auswertung der notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen muß man die in § 7, § 8 getroffene Fallunterscheidung berücksichtigen, d. h. man unterscheide zwischen Problemen mit linear auftretender Steuerung und Problemen mit regulärer Hamilton-Funktion.

In der Praxis ist noch folgendes zu beachten:

(1) Es treten überwiegend die Ordnungen $p=1$ oder $p=2$ auf.

(2) Sei $x_0(t)$, $u_0(t)$ die Lösung des unbeschränkten Problems (10.1) und sei

$$\alpha_0 := \max_{0 \le t \le T} S(x_0(t)) .$$

Lösungen zur ZB $S(x) \le 0$ berechnet man dann mit einer

Homotopie der Form

$$\text{ZB}: \quad S(x) \le \alpha_i \,, \quad i = 0, .., k \,,$$
$$0 = \alpha_k < \alpha_{k-1} < .. < \alpha_1 < \alpha_0 \,.$$

10.2 Probleme mit linear auftretender Steuerung

Das Problem habe die in § 7 behandelte Form mit einer affin-linear auftretenden Steuerung u:

$$f_0(x,u) = a_0(x) + b_0(x)\,u \,,$$
$$f(x,u) = a(x) + b(x)\,u \,.$$

Es sei $m=1$ und $U = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Schaltfunktion

$$\sigma(t) = b_0(x(t)) + \lambda(t)\, b(x(t))$$

bestimmt die Steuerung auf inneren Teilstücken gemäß

* und es gilt $\sigma(t_1)=0$.

$$u(t) = \begin{cases} a, & \sigma(t) > 0 \\ b, & \sigma(t) < 0 \\ \text{singulär}, & \sigma(t) = 0,\ \tau_1 \le t \le \tau_2 \end{cases}.$$

Die Funktion $S^p(x,u)$ in (10.3) ist linear in u, d. h.

$$S^p(x,u) = \alpha(x) + \beta(x)\,u .$$

Nach Vor. (10.5) muß gelten

$$(S^p)_u(t) = \beta(x(t)) \neq 0$$

auf Randstücken $[t_1, t_2]$. Die Randsteuerung mit $S^p(x,u) = 0$ ist dann

$$u(x) = -\alpha(x)/\beta(x) .$$

Im Minimumprinzip (10.7) wurde vorausgesetzt

$$a < u(x(t)) < b, \quad t_1 < t < t_2 .$$

aufgrund der Minimumbedingung

impliziert dies

$$H_u(t) = \sigma(t) = 0, \quad t_1 < t < t_2 .$$

Die Randsteuerung verhält sich also formal wie eine singuläre Steuerung auf inneren Teilstücken.

Die Sprungbedingung (10.7) (4) lautete:

$$\lambda(t_1+) = \lambda(t_1-) - \nu(t_1)\, S_x(x(t_1)), \quad \nu(t_1) \ge 0,$$

in einem Verbindungspunkt t_1. Für die numerische Behandlung wichtig ist das folgende Resultat für $p=1$; vgl. MAURER (1975).

(10.9) Satz: Sei $p=1$ und sei $u(t)$ unstetig in einem Verbindungspunkt t_1. Dann gilt $\nu(t_1) = 0$, also ist $\lambda(t)$ stetig in t_1

*

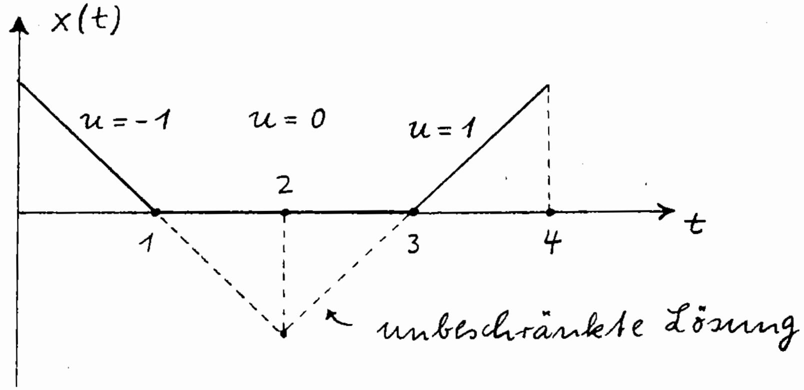
(10.10) Beispiel:

$$\min \int_0^4 x(t)\,dt$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(4) = 1,$$

$$-1 \le u \le 1, \qquad x \ge 0.$$

Die optimale Lösung kann sofort angegeben werden



Figur 10.1

Es ist

$$S(x) = -x, \quad S^1(x,u) = -\dot{x} = -u,$$

also liegt eine ZB der Ordnung p=1

vor. Mit der erweiterten Hamilton-Funktion

$$\tilde{H} = x + \lambda u + \mu(-x)$$

gilt nach (10.7)

$$\dot{\lambda} = -\tilde{H}_x = -1 + \mu,$$

$$u^* = \arg\min_{u \in [-1,1]} \tilde{H}.$$

Auf dem Randstück [1,3] muß gelten

$$S(x(t)) = -x(t) \equiv 0,$$

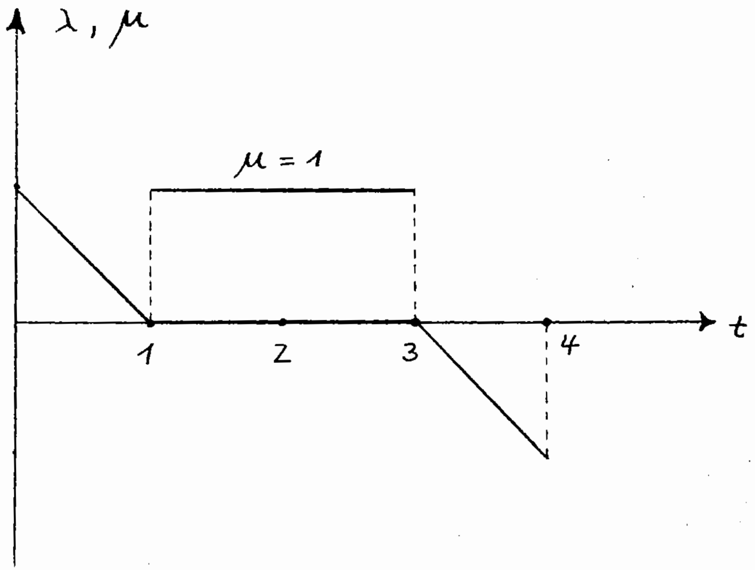
$$S^1(x(t), u(t)) = -u(t) \equiv 0,$$

$$\tilde{H}_u(t) = \lambda(t) \equiv 0.$$

Insbesondere folgt $0 = \dot{\lambda} = -1 + \mu$, also $\mu \equiv 1$. Nach Satz (10.9) ist überdies λ stetig in $t=1$ und $t=3$. Auf den inneren Teilstücken [0,1], [3,4] berechnet man mit $\dot{\lambda} = -1$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 3-t, & 3 \le t \le 4 \end{cases}.$$

Die optimale Steuerung ist damit $u(t) = -\operatorname{sgn}(\lambda(t))$. Die hinreichenden Bedingungen (10.8) prüft man sofort nach.



Figur 10.2

(10.11) Beispiel:
(Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers; vgl. Beispiel (5.20)).

Minimiere T unter

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u(t)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -x_3 + u(t)$$
$$x(0) = (0,0,0,0)^T,\ x(T) = (1,0,0,0)^T,$$
$$-1 \le u(t) \le 1,$$
$$x_2(t) \le \alpha.$$

Die ZB

$$S(x) = x_2 - \alpha \le 0$$

bedeutet also eine Beschränkung der Geschwindigkeit der Laufkatze. Die Ordnung der ZB ist $p=1$ wegen $S^1(x,u) = \dot{x}_2 = u$

$$* \quad 0 = H_u = \lambda_2(t) + \lambda_4(t) - \nu(t),$$
$$0 = \dot{\nu}(t) = -\lambda_1(t) - \mu(t) - \lambda_3(t).$$
Damit wird
$$\mu(t) = -(\lambda_1(t) + \lambda_3(t))$$

Die Randsteuerung ist damit $u = 0$.
Die Hamilton - Funktion

$$\tilde{H} = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 x_4 + \lambda_4(-x_3 + u) + \mu(x_2 - \alpha)$$

bestimmt die adjungierten DGL

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 - \mu,$$
$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_4, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3.$$

Auf <u>inneren Teilstücken</u> erhält man wie in (5.5)

$$\lambda_1(t) = A, \quad \lambda_2(t) = -At + B,$$
$$\lambda_3(t) = R\sin(t + C), \quad \lambda_4(t) = R\cos(t + C).$$

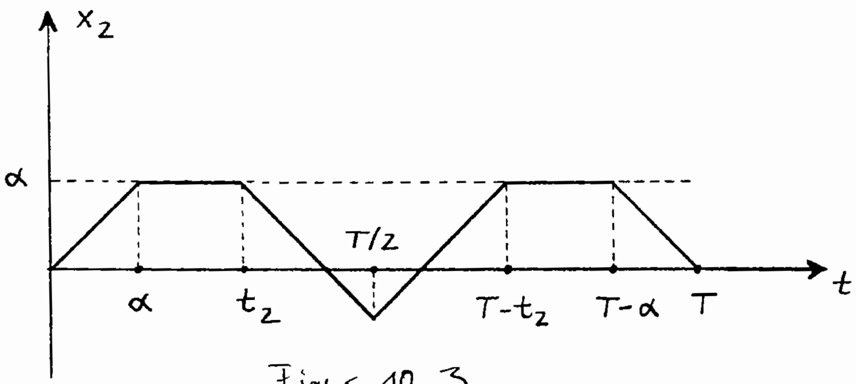
Auf einem Randstück $[t_1, t_2]$ gilt *

* mit der optimalen (symmetr.) Steuerung

Für die unbeschränkte Lösung $x^0(t)$ in (5.20) berechnet man

$$\alpha_0 := \max_{0 \le t \le T} x_2^0(t) = t_1 = 0.802357.$$

Für die Parameter $\frac{1}{2}\pi \le \alpha < \alpha_0$ motiviert Fig. 5.4 die folgende geometrische Lösung:



*

Figur 10.3

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le \alpha \\ 0 & , \quad \alpha \le t \le t_2 \\ -1 & , \quad t_2 \le t \le T/2 \\ 1 & , \quad T/2 \le t \le T-t_2 \\ 0 & , \quad T-t_2 \le t \le T-\alpha \\ -1 & , \quad T-\alpha \le t \le T \end{cases}$$

und den beiden Randstücken $[\alpha, t_2]$ und $[T-t_2, T-\alpha]$.
Die beiden unbekannten Parameter t_2 und T lassen sich z.B. mit dem NEWTON-Verfahren so bestimmen: nach Integration der Zustands-DGL mit der angegebenen Steuerung müssen die beiden Endbedingungen

$$x_1(T) = 1 \,, \quad x_3(T) = 0$$

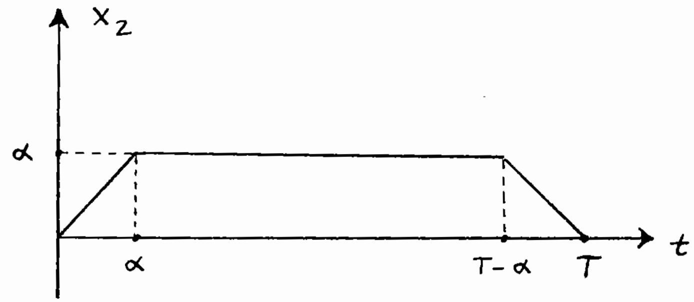
erfüllt sein. Aus Symmetriegründen gilt dann

$$x_2(T) = 0 \,, \quad x_4(T) = 0 \,,$$
$$x_1(T/2) = 0.5 \,, \quad x_3(T/2) = 0$$

Einige Zahlenwerte:

α	T	t_2
0.6	4.35410	1.05791
0.4	4.67760	1.49556
0.2	5.8391	2.56199
0.16	6.42658	3.16177
$1/2\pi$ = 0.159155	6.44234	$T/2$

Für $\alpha = 1/2\pi$ ist die optimale Lösung:



Figur 10.4

Die Schaltpunkte $t_2 = T/2 = T - t_2$ fallen hier zusammen. Die zugehörigen adjungierten Variablen sind mehrdeutig.

Wegen Satz (10.9) ist $\lambda(t)$ stetig in $[0,T]$. Die vier Konstanten kann man dann aus den drei Schaltbedingungen

$$\sigma(\alpha) = \sigma(t_2) = \sigma(T/2) = 0$$

und der Endbedingung

$$H(T) = 1 - \sigma(T) = 0$$

berechnen. Z.B. erhält man für $\alpha = 0.4$

$$A = -1.55921, \quad B = -2.26636,$$
$$C = -0.768004, \quad R = 1.76055.$$

10.3 Probleme mit regulärer Hamilton-Funktion

Wir greifen auf die in §8 dargestellte Situation zurück. Zur Vereinfachung sei $m=1$ und $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Die Hamilton-Funktion H (und damit auch $\tilde{H}$) sei C^p-regulär, d.h. die durch

$$u^*(x,\lambda) = \arg\min_{u \in \mathbb{R}} H(x,\lambda,u)$$

definierte Funktion ist eindeutig bestimmt und eine C^p-Funktion. In diesem Fall erhält man zusätzliche Glattheitseigenschaften für die optimale Steuerung $u(t)$.

(10.12) Satz: Sei H C^p-regulär und sei t_1 ein Verbindungs- oder Kontaktpunkt.

(i) Für $p=1$ ist $u(t)$ stetig in t_1 und es gilt $\nu(t_1)=0$, d.h. $\lambda(t)$ ist stetig in t_1.

(ii) Für $p \geq 2$ sind die Ableitungen

$$u^{(i)}(t), \quad i=0,..,p-2,$$

stetig in t_1.

(iii) Ist p ungerade, $p \geq 3$, und ist $u^{(p-1)}(t)$ unstetig in t_1, so ist t_1 ein Kontaktpunkt.

Zum Beweis vergleiche man JACOBSON / LELE / SPEYER (1971), MAURER (1976).

(10.13) Beispiel: Ordnung $p=1$:
Wir betrachten nochmals Beispiel (8.8)

$$\min \int_0^1 (x^2+u^2)\,dt,$$

$$\dot{x} = x^2 - u \quad x(0)=1, \; x(1)=1$$

unter der ZB

$$x \geq \alpha, \quad \alpha < 1,$$

d.h.

$$S(x) = \alpha - x \leq 0.$$

Für die unbeschränkte Lösung $x_0(t)$ galt

$$\alpha_0 = \min_{0 \leq t \leq 1} x_0(t) = x_0(0.5) = 0.768115.$$

Also ist die Wahl von $\alpha_0 < \alpha < 1$ zu treffen. Die Ordnung ist $p=1$ wegen

$$S^1(x,u) = \dot{x} = x^2 - u.$$

Dies führt auf die Randsteuerung

$$u = x^2 = \alpha^2.$$

Die Hamilton-Funktion

$$\tilde{H} = x^2 + u^2 + \lambda(x^2-u) + \mu(\alpha - x)$$

ist C^∞-regulär. Weiterhin gilt

$$\dot\lambda = -H_x = -2x(1+\lambda) + \mu ,$$
$$H_u = 2u - \lambda = 0 , \quad u = \lambda/2 .$$

Auf einem Randstück folgt daher

$$\lambda/2 = u = \alpha^2 ,$$

also

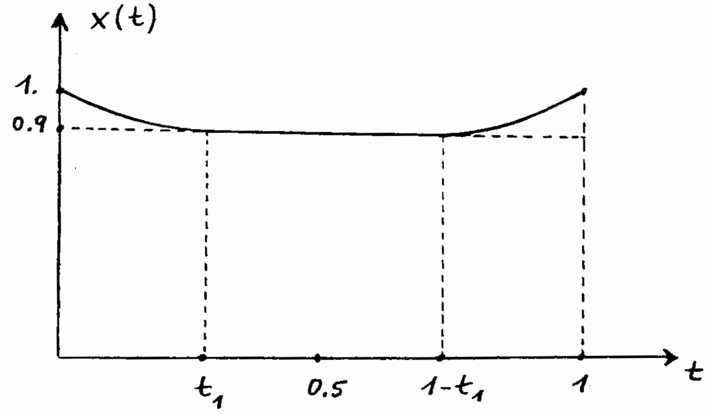
$$0 = \dot\lambda = -2x(1+\lambda) + \mu$$
$$= -2\alpha(1+2\alpha^2) + \mu ,$$
$$\mu = 2\alpha(1+2\alpha^2) > 0 .$$

Nach Satz (10.12) sind $u(t)$ und $\lambda(t)$ stetig in $[0,1]$. Die Form der unbeschränkten Lösung $x_0(t)$ läßt vermuten, daß die beschränkte Lösung ein Randstück $[t_1, t_2] \subset (0,1)$ enthält. Man hat dann das folgende RWP in $[0, t_1]$ mit variablem Endpunkt t_1 zu lösen:

$$\dot x = x^2 - \lambda/2 , \qquad 0 \le t \le t_1 ,$$
$$\dot\lambda = -2x(1+\lambda) ,$$
$$x(0) = 1 ,$$
$$x(t_1) = \alpha , \quad \lambda(t_1) = 2\alpha^2 .$$

Die Lösung in $[0,1]$ ist dann symmetrisch mit $t_2 = 1 - t_1$. Für $\alpha = 0.9$ erhält man

$$\lambda(0) = 3.46139 , \quad \mu = 4.716 ,$$
$$t_1 = 0.285321 , \quad t_2 = 1 - t_1 ,$$
Zielfunktion: 1.65620 .



Figur 10.5

Die hinreichenden Optimalitäts-Bedingungen (10.8) sind erfüllt, da

$$H^0(x,\lambda) := \min_{u \in \mathbb{R}} H(x,\lambda,u)$$

$$= x^2 + \lambda x^2 - \lambda^2/4$$

konvex in x ist für jedes $\lambda > 0$.

(10.14) <u>Beispiel:</u> <u>Ordnung $p=2$</u>
(vgl Beispiel (10.6))

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \, dt$$

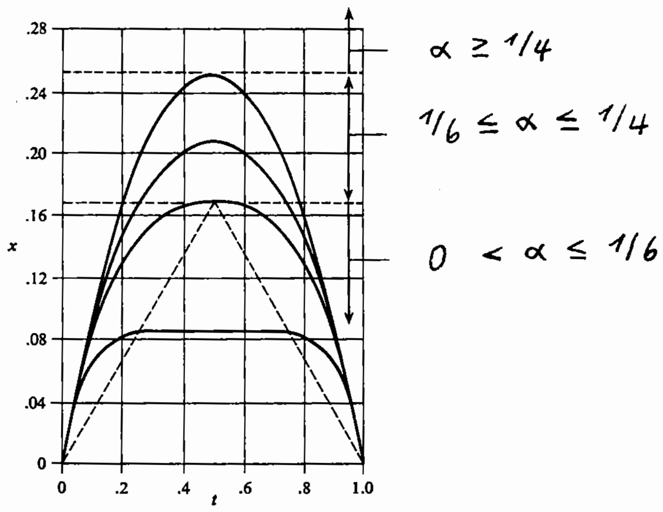
$$\dot{x} = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_1 \le \alpha .$$

*

* Die ZB $S(x) = x_1 - \alpha \le 0$ hat die Ordnung $p=2$, da $s^1(x) = \dot{x}_1 = x_2$, $s^2(x,u) = \dot{x}_2 = u$. Die zugehörigen Lösungen sind für

$0 < \alpha \le 1/4$ in der folgenden Figur wiedergegeben.



Figur 10.6 : Optimale Lösung $x_1(t)$

Unbeschränkte Lösung:

Die Hamilton-Funktion

$$H(x,\lambda,u) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

ist C^∞-regulär. Aus

$$H_u = u + \lambda_2 = 0$$

folgt

$$u(t) = -\lambda_2(t).$$

Das resultierende RWP für $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u = -\lambda_2, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \qquad x(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \; x(1) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

hat die Lösung (vgl. Fig. 10.6)

~~$\lambda_1(t) \equiv 0$, $\lambda_2(t) \equiv 2$, $u(t) \equiv -2$~~ *

* $\lambda_1(t) \equiv 0$, $\lambda_2(t) \equiv 2$, $u(t) \equiv -2$,
$x_2(t) = 1-2t$, $x_1(t) = t(1-t)$,
$\alpha_0 := \max_{0 \le t \le 1} x_1(t) = x_1(\tfrac{1}{2}) = 1/4$

Also ist die ZB $x_1 \le \alpha$ erst für $\alpha \le 1/4$ wirksam.

Beschränkte Lösung für $0 < \alpha \le 1/4$:

Beim Auffinden der Lösung läßt man sich von der Vorstellung leiten, daß die Lösung stetig von α abhängt. Aus Symmetriegründen kann die Lösung nur einen Kontaktpunkt $t_1 = 1/2$ bzw. ein Randstück $[t_1, t_2]$ enthalten. Nach (10.7)(4) gilt die Sprungbedingung

$$\lambda(t_1+) = \lambda(t_1-) - \nu S_x(x(t_1)), \quad \nu \ge 0,$$

also wegen $S(x) = x_1 - \alpha$

$$\text{(10.15)} \qquad \lambda_1(t_1+) = \lambda_1(t_1-) - \nu, \quad \nu \ge 0, \qquad \lambda_2(t_1+) = \lambda_2(t_1-).$$

*

* Auf einem Randstück $[t_1, t_2]$ folgt
$S = x_1 - \alpha = 0$, $S^1 = x_2 = 0$, $S^2 = u = 0$

Mit der erweiterten Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(x,\lambda,\mu,u) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \mu(x_1-\alpha)$$

erhält man

$$\dot{\lambda}_1 = -\mu, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,$$

$$\tilde{H}_u = u + \lambda_2 = 0 .$$

Mit der Randsteuerung $u(t)=0$ ergibt sich hieraus

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu = 0 \quad \text{in } [t_1, t_2].$$

Die Sprungbedingungen in t_1, t_2 sind gerade (10.15). Überdies ist die optimale Steuerung $u(t)$ stetig in t_1 und t_2 nach Satz (10.12). Daher gelten die Sprungbedingungen

$$\text{(10.16)} \quad \begin{aligned} &\lambda_1(t_i+) = \lambda_1(t_i-) - \nu_i, \quad \nu_i \ge 0, \\ &\lambda_2(t_i+) = \lambda_2(t_i-) = 0 \end{aligned} \qquad (i=1,2)$$

Fall: $1/6 \le \alpha \le 1/4$

Die optimale Lösung hat den einen Kontaktpunkt $t = 1/2$, in dem $x_1(t)$ maximal wird, also $x_2(\frac{1}{2}) = 0$. Man hat dann das folgende RWP im Intervall $[0, 1/2]$ zu lösen:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda_2, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1,$$

$$x_1(\tfrac{1}{2}) = \alpha, \quad x_2(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Die Lösung im Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ ergibt sich daraus durch symmetrische Fortsetzung. Auf diese Weise erhält man

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 24(1-4\alpha), & 0 \le t \le 1/2 \\ -24(1-4\alpha), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\nu = \lambda_1(\tfrac{1}{2}-) - \lambda_1(\tfrac{1}{2}+) = 2\lambda_1(\tfrac{1}{2}-)$$

$$= 48(1-4\alpha) \ge 0,$$

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 8(1-3\alpha) - 24(1-4\alpha)t, & 0 \le t \le 1/2 \\ 8(1-3\alpha) - 24(1-4\alpha)(1-t), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$u(t) = -\lambda_2(t).$$

Fall: $0 < \alpha \le 1/6$

Die optimale Lösung hat ein Randstück in $[t_1, t_2]$. Hier löst man das folgende RWP in $[0, t_1]$ mit freiem Rand t_1:

4 DGL:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda_2, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1,$$

5 Randwerte:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1,$$
$$x_1(t_1) = \alpha, \quad x_2(t_1) = 0,$$
$$\lambda_2(t_1) = 0.$$

Man erhält $t_1 = 3\alpha$, $t_2 = 1 - t_1 = 1 - 3\alpha$, und die gesamte Lösung durch symmetrische Fortsetzung:

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{9\alpha^2}, & 0 \le t \le 3\alpha \\ 0, & 3\alpha \le t \le 1-3\alpha \\ -\frac{2}{9\alpha^2}, & 1-3\alpha \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{9\alpha^2} > 0 \quad \text{in } (10.16),$$

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{3\alpha}\left(1 - \frac{t}{3\alpha}\right), & 0 \le t \le 3\alpha \\ 0, & 3\alpha \le t \le 1-3\alpha \\ \frac{2}{3\alpha}\left(1 - \frac{1-t}{3\alpha}\right), & 1-3\alpha \le t \le 1 \end{cases}$$

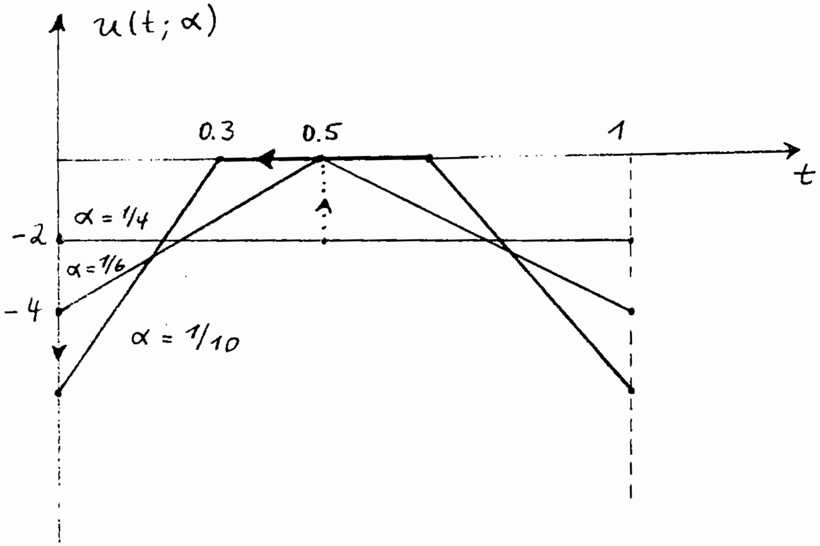
$$u(t) = -\lambda_2(t).$$

Stetige Abhängigkeit von α:

Die Abhängigkeit aller Funktionen werde durch einen Index α gekennzeichnet; z.B. bezeichne $u(t;\alpha)$ die optimale Steuerung. Dann sind die Abbildung

$$\alpha \to u(\cdot;\alpha) \in C[0,1], \quad \alpha > 0,$$

sowie alle übrigen Funktionen stetig bzgl. α. Die Struktur der Lösung bzgl. α ändert sich dabei in $\alpha = 1/4$ und $\alpha = 1/6$.



Figur 10.7

Insbesondere gilt

$$\lim_{\alpha \uparrow 1/4} \nu(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \downarrow 1/6} \nu(\alpha) = \lim_{\alpha \uparrow 1/6} \nu_1(\alpha) + \nu_2(\alpha) = 16,$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 1/6} u(1/2; \alpha) = 0.$$

Die letzte Beziehung zeigt, daß erst für $\alpha = 1/6$ die Aufsprung-Bedingung (10.4) eines Randstückes

$$x_1(t_1) = \alpha, \quad x_2(t_1) = 0, \quad u(t_1) = 0,$$

erfüllt ist mit $t_1 = 1/2$. Dies erklärt die Tatsache, daß für die Parameter $1/6 \leq \alpha \leq 1/4$ nur ein Kontaktpunkt auftritt.

Ein solches Verhalten der Lösung bzgl. α ist typisch für alle Probleme der Ordnung $p = 2$ mit regulärer Hamilton-Funktion.